पढ़े चलो, बढ़े चलो
Samagra Shiksha Abhiyan (Secondary Education)

निदानात्मक कक्षाओं हेतु मॉड्यूल

2021–22

विषय : गणित

कक्षा : 9वीं

समग्र शिक्षा अभियान (सेकेण्डरी एजुकेशन) लोक शिक्षण संचालनालय, म.प्र.

लोक शिक्षण संचालनालय, म.प्र. भोपाल

आमुख

प्रदेश में संचालित शासकीय हाई/हायर सेकेण्डरी स्कूलों में छात्र– छात्राओं का परीक्षा परिणाम गणित विषय में प्रभावित न हो इसके लिए आगामी परीक्षा की तैयारी एवं श्रेष्ठ परीक्षा परिणाम हेतु यह रेमेडियल टीचिंग हेतु मैटेरियल तैयार किया गया है। जिसके उपयोग से टीचर अपने समस्त छात्रों को बेहतर अंक प्राप्त करने एवं अगली कक्षा में प्रोन्नत होने हेतु समर्थ बना सकेंगें।

इस मैटेरियल को ब्लू प्रिंट के अनुसार उन महत्वपूर्ण पाठ्य–वस्तुओं का समावेश कर तैयार किया गया है जो कि प्रभावी शिक्षण एवं छात्र–छात्राओं के गणित विषय में औसत दक्षता विकसित करने के साथ–साथ परीक्षा परिणाम में सुधार हेतु लाभकारी सिद्ध होगा।

शिक्षकों से अपेक्षित है कि डी एवं ई ग्रेड के विद्यार्थियों को आगामी 2 माह तक इस मॉड्यूल के अनुसार अभ्यास करांए। विद्यार्थियों को प्रत्येक प्रश्न के उत्तर किस प्रकार लिखना है इसे समझांए तथा छात्रों द्वारा की जा रही गलतियों में सुधार करांए।

हाई स्कूल परीक्षा सत्र 2021–22

BLUE PRINT OF QUESTION PAPER

कक्षा – 9वीं | पूर्णांक –80

विषय–गणित | समय – 3.00 घन्टे

क्रं.	इकाई एवं विषय वस्तु	इकाई पर आवंटित अंक	वस्तुनिष्ठ प्रश्न	अंकवार प्रश्नों की संख्या			कुल प्रश्न
			1 अंक 8	2 अंक	3 अंक	4 अंक	
1	ब्रिज कोर्स	8	8	–	–	–	
2	अध्याय–1 संख्या पद्वति	6	2	2	–	–	2
3	अध्याय– बहुपद	6	2	2	–	–	2
4	अध्याय–3 निर्देशांक ज्यामिति	4	2	1	–	–	1
5	अध्याय – 4 दो चरों वाले रैखिक समीकरण	4	2	1	–	–	1
6	अध्याय–6 रेखाएँ और कोण	5	2	–	1	–	1
7	अध्याय–7 त्रिभुज	5	2	–	1	–	1
8	अध्याय–8 चतुर्भुज	5	1	–	–	1	1
9	अध्याय–9 समांतर चतुर्भुजों और त्रिभुजों के क्षेत्रफल	4	2	1	–	–	1
10	अध्याय–10 वृत्त	5	2	–	1	–	1
11	अध्याय–11 रचनाएँ	4	–	–	––	1	1
12	अध्याय–12 हीरोन का सूत्र	5	1	–	–	1	1
13	अध्याय–13 पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन	8	2	1	–	1	2
14	अध्याय–14 सांख्यिकी	5	2	–	1	–	1
15	अध्याय–15 प्रायिकता	6	2	2		–	2
	कुल योग	80	32	20	12	16	18+5=23

कक्षा–9वीं
विषय–गणित
कम किए गए पाठ्यक्रम की विषयवस्तु

क्रं.	इकाई / खण्ड	कम किये गये अध्याय / विषय वस्तु का नाम
1	अध्याय–1 1.4	संख्या रेखा पर वास्तविक संख्याओं का निरूपण
2	अध्याय–4 4.4	दो चरों वाले रेखीय समीकरण का आलेख
3	अध्याय–4 4.5	एक x अक्ष y अक्ष के समान्तर रेखाओं के समीकरण
4	अध्याय–5	यूक्लिड की ज्यामिति का परिचय
5	अध्याय–7 7.5 7.6	त्रिभुजों की सर्वांगसमता के लिए कुछ और कसौटियां एक त्रिभुज में असमिकाऐं
6	अध्याय–8 8.5 8.6	चतुर्भुज के समान्तर चतुर्भुज होने के लिए एक अन्य प्रतिबंध मध्यबिन्दु प्रमेय
7	अध्याय–10 10.7 10.8	एक वृत्त के चाप द्वारा अंतरित कोण चक्रीय चतुर्भुज
8	अध्याय–11 11.3	त्रिभुजों की कुछ रचनायें
9	अध्याय–12 12.3	चतुर्भुजों के क्षेत्रफल ज्ञात करने में हीरोन के सूत्र का अनुप्रयोग
10	अध्याय–14 14.4	आंकड़ों का आलेखीय निरूपण

रेमिडियल टीचिंग

रेमिडियल टीचिंग यानि उपचारात्मक शिक्षण का उद्देश्य विद्यार्थियों के कठिनाई के क्षेत्रों का निदान करना, उनकी कठिनाईयों/ समस्याओं को दूर करने में सहायता के लिए आवश्यक मार्गदर्शन प्रदान करना है।

उपचारात्मक शिक्षण (Remedial Teaching) के चार चरण है –

चरण 1 – सिखाना

चरण 2 – रिव्यू

चरण 3 – कमज़ोरी जानने के लिए टेस्ट

चरण 4 – टेस्ट से पता चली कमज़ोरी हेतु पुनः उपचारात्मक अभ्यास (Remedial Drill) कराना

विषय शिक्षकों के लिए निर्देश

1. ब्लूप्रिंट का विद्यार्थियों को महत्व बताया जाए एवं कक्षा में भी लगाया जाए।
2. पाठ्यक्रम से संबंधित सूत्र ड्रॉइंग शीट पर तैयार कर कक्षा में लगाएँ।
3. रचनाओं से संबंधित आकृति ड्रॉइंग शीट पर तैयार कर कक्षा में लगाएँ एवं रचनाओं का बार–बार अभ्यास कराना सुनिश्चित करें।
4. वस्तुनिष्ठ प्रश्नों के लिए प्रश्नमंच प्रतियोगिता का आयोजन अनिवार्यतः करें।
5. शैक्षणिक सहायक सामग्री का उपयोग करना सुनिश्चित करें जैसे ज्यॉमेट्री बॉक्स, क्षेत्रमिति किट, इत्यादि।
6. डॉट पेपर या ग्राफ़ पेपर का उपयोग दो चर वाले रैखिक समीकरण व निर्देशांक ज्यामिति में अवश्य करें।
7. प्रत्येक रेमेडियल कक्षा में अंतिम 20 मिनट में 1 या 2 प्रश्नों का टेस्ट लेना सुनिश्चित करें।
8. विद्यार्थियों की सक्रिय सहभागिता के लिए शिक्षण में गतिविधि का उपयोग किया जाए।
9. विद्यार्थियों को प्रोत्साहित करें ताकि पठन–पाठन में उनकी रुचि बनी रहे।
10. प्रश्न का सही हल करने पर उत्तम, बहुत अच्छा, अच्छा जैसे शब्द का उल्लेख उनकी उत्तर पुस्तिका में अवश्य करें।

अनुक्रमणिका

	रेमेडियल टीचिंग के निर्देश ब्लू प्रिन्ट
क्र.	पाठ्यक्रमानुसार इकाईयां
1	1. संख्या पद्धति
2	2. बहुपद
3	3. निर्देशांक ज्यामिति
4	4. दो चरों वाला रैखिक समीकरण
5	14. सांख्यिकी
6	15. प्रायिकता
7	11. रचनाएँ
8	12. हीरोन का सूत्र
9	13. पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन
10	6. रेखाएँ और कोण
11	7. त्रिभुज
12	10. वृत्त
13	8. चतुर्भुज
14	9.समांतर चतुर्भुजों और त्रिभुजों के क्षेत्रफल

अध्याय – 1 संख्या पद्धति

शिक्षकों के लिए निर्देश :–

- यह अध्याय अपने में 6 अंक समाहित किए हुए है :
  - 1 अंक के 2 प्रश्न
  - 2 अंक के 2 प्रश्न
- विद्यार्थी मूल अंकों से परिचित हैं। अतः प्राकृतिक संख्याएं, पूर्ण संख्याएं, पूर्णांक संख्याएं परिमेय संख्याओं एवं अपरिमेय संख्याओं की सहायता वास्तविक संख्याओं और उनके दशमलव प्रसार का बोध कराएँ।
- संख्या रेखा पर वास्तविक संख्याओं का निरूपण कराएं।
- वास्तविक संख्याओं पर संक्रियाओं का बोध कराएं।
- वास्तविक संख्याओं के लिए घातांक–नियम का बोध कराकर दक्ष बनायें।

विद्यार्थियों के पूर्व ज्ञान (मूल अंक) के आधार पर हम इस इकाई में प्राकृतिक संख्या, पूर्ण संख्या, पूर्णांक, परिमेय संख्या, अपरिमेय संख्या की सहायता से वास्तविक संख्या एवं संक्रियाओं के घातांक के नियम आदि पर चर्चा करेंगे।

विषय वस्तु

- प्राकृतिक संख्याएँ, पूर्ण संख्याएँ, पूर्णांक संख्याएँ, परिमेय एवं अपरिमेय संख्याएँ।
- अपरिमेय संख्याओं का संख्या रेखा पर निरूपण।
- दशमलव संख्याओं का $\frac{p}{q}$ के रूप में व्यक्त करना जहाँ दशमलव संख्या असांत आवर्ती हों।
- हर का परिमेयकरण।
- घातांक के नियम।

विषय से संबंधित महत्वपूर्ण प्रश्न

प्रश्न : 3 और 4 के बीच छः परिमेय संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

हल : संख्याएँ 3 और 4 के बीच अनन्ततः अनेक परिमेय संख्याएँ हो सकती हैं। हमें छः परिमेय संख्याएँ ज्ञात करना हैं।

$$\therefore 3 = 3 \times \frac{6+1}{6+1} = 3 \times \frac{7}{7} = \frac{21}{7}$$

एवं $4 = 4 \times \frac{6+1}{6+1} = 4 \times \frac{7}{7} = \frac{28}{7}$

अतः 3 और 4 के बीच छः परिमेय संख्याएँ हैं : $\frac{22}{7}, \frac{23}{7}, \frac{24}{7}, \frac{25}{7}, \frac{26}{7}, \frac{27}{7}$

प्रश्न : $\frac{3}{5}$ और $\frac{4}{5}$ के बीच पाँच परिमेय संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

हल : हमें पाँच परिमेय संख्याएँ ज्ञात करना है।

$\therefore \frac{3}{5} = \frac{3}{5} \times \frac{5+1}{5+1} = \frac{3}{5} \times \frac{6}{6} = \frac{18}{30}$

एवं $\frac{4}{5} = \frac{4}{5} \times \frac{5+1}{5+1} = \frac{4}{5} \times \frac{6}{6} = \frac{24}{30}$

अतः $\frac{3}{5}$ और $\frac{4}{5}$ के बीच पाँच परिमेय संख्याएँ हैं :–

$\frac{19}{30}, \frac{20}{30}, \frac{21}{30}, \frac{22}{30}, \frac{23}{30}$

प्रश्न : निम्नलिखित भिन्नों को दशमलव रूप में लिखिए और बताइए कि प्रत्येक का दशमलव प्रसार किस प्रकार का है?

(1) $\frac{10}{3}$ (2) $\frac{7}{9}$ (3) $\frac{1}{7}$

हल :

```
   | 3.333...
 3 | 10
   | −9
   |  10
   |  −9
   |   10
   |   −9
   |    10
   |    −9
   |     1
```

```
   | 0.875
 8 |  7
   | −0
   |  70
   | −64
   | 60
   |   −56
   |    40
   |   −40
   |     0
```

```
 0.142857
       7 | 1
         | −0
         | 10
         | −7
         | 30
         | −28
         |  20
         | −14
         |   60
         |   56
         |   40
         |  −35
         |    50
         |   −49
         |     1
```

यहाँ $\frac{1}{3}$ एवं $\frac{1}{7}$ अनवसानी आवर्ती (non-terminating recurring) या असांत आवर्ती है एवं $\frac{7}{8}$ सांत terminating है।

प्रश्न : निम्नलिखित को $\frac{p}{q}$ के रूप में व्यक्त कीजिए जहाँ p और q है तथा $q \neq 0$ है :

(1) $0.\overline{6}$ (2) $0.4\overline{75}$ (3) 0.001

हल : (1) माना $x = 0.\overline{6} = 0.66666 \ldots \ldots$

यहाँ एक अंक 6 की पुनरावृत्ति है, इसलिए हम x को 10 से गुणा करने पर

$$10x = 6.6666 \ldots \ldots = 6 + 0.66666 \ldots \ldots$$

$=> 10x = 6 + x$

$=> 10x - x = 6$

$$9x = 6$$

$$x = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

(2) माना $x = 0.4\overline{78} = 0.4787878 \ldots \ldots$

यहाँ दो अंकों 78 की पुनरावृत्ति है, इसलिए हम x को 100 से गुणा करने पर

$$100x = 47.8787878 \ldots \ldots$$

$=> 100x = 47.4 + 0.4787878 \ldots \ldots$

$=> 100x = 47.4 + x$

$=> 100x - x = 47.4$

$=> \quad 99x = 47.4$

$$x = \frac{47.4}{99} = \frac{474}{990}$$

यहां हम वर्गमूलों से संबंधित कुछ सर्वसमिकांए दे रहें हैं:

(i) $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\,\sqrt{b}$

(ii) $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

(iii) $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = a - b$

(iv) $(a + \sqrt{b})(a - \sqrt{b}) = a^2 - b$

(v) $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{c} + \sqrt{d}) = \sqrt{ac} + \sqrt{ad} + \sqrt{bc} + \sqrt{bd}$

(vi) $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = a + \sqrt{ab} + b$

इन सर्वसमिकाओं के आधार पर निम्न व्यंजकों के सरलीकरण पर ध्यान दीजिए :

(i) $(5+\sqrt{7})(2+\sqrt{5}) = 10 + 5\sqrt{5} + 2\sqrt{7} + \sqrt{35}$

(ii) $(5-\sqrt{5})(5-\sqrt{5}) = 5^2 - (\sqrt{5})^2 = 25 - 5 = 20$

(iii) $(\sqrt{3}-\sqrt{7})^2 = 3 + 2\sqrt{3}\sqrt{7} + = 10+2\sqrt{21}$

(iv) $(\sqrt{11}-\sqrt{7})(\sqrt{11}+\sqrt{7}) = 11 - 7 = 4$

परिमेय करण :– वर्गमूलों से संबंधित सर्वसमिकाओं के प्रयोग से हम हर को एक परिमेय संख्या के रूप में परिवर्तित कर सकतें हैं।

प्रश्न– $\frac{1}{\sqrt{2}}$ के हर का परिमेय करण कीजिए।

हल हम $\frac{1}{\sqrt{2}}$ को हमें एक ऐसे तुल्य व्यंजक के रूप में लिखना है जिसमें हर एक परिमेय संख्या हो। तथा हम जानते है कि $\sqrt{2}.\sqrt{2} = 2$ परिमेय है।

अतः $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \; \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

प्रश्न $\frac{1}{2+\sqrt{3}}$ का परिमेयीकरण कीजिए।

हल $\frac{1}{2+\sqrt{3}} = \frac{1}{2+\sqrt{3}} \text{x} \frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = \frac{2-\sqrt{3}}{4-3} = 2-\sqrt{3}$

वास्तविक संख्याओं के लिए घातांक नियम :–

पिछली कक्षाओं में आपने घातांक नियमों के विषय में अवश्य जाना होगा, आपको फिर से याद दिलाते हुए कि यदि आधार a और m और n घातांक हों तो ये नियम निम्नानुसार होते हैं :

(1) $a^m, a^n = a^{m+n}$ (2) $(a^m)^n = a^{mn}$

(3) $\frac{a^m}{b^n} = a^{m-n}, m > n$ (4) $a^m.b^m = (ab)^m$

तथा इनसे हम, $a^0 = 1$ तथा $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$ भी प्राप्त कर सकते हैं।

अब हम इन नियमों को ऋणात्मक घातांकों पर भी लागू कर सकते हैं।

उदाहरण – (1) $17^2 \text{ x } 17^{-5} = 17^{-3}$ (2) $(5^2)^{-7} = 5^{-14}$

(3) $\frac{23^{-10}}{23^7} = 23^{-17}$ (4) $(7^{-3})(9)^{-3} = (63)^{-3}$

प्रश्न : सरल कीजिए।

(1) $2^{\frac{2}{3}}.2^{\frac{1}{5}}$ (2) $\left(\frac{1}{3^3}\right)^7$ (3) $\frac{11^{\frac{1}{2}}}{11^{\frac{1}{4}}}$ (4) $7^{\frac{1}{2}}.8^{\frac{1}{2}}$

हल : (1) $2^{\frac{2}{3}}.2^{\frac{1}{5}}$ $\because a^m.a^n = a^{m+n}$

$= 2^{\frac{2}{3}+\frac{1}{5}} = 2^{\frac{10+3}{15}} = 2^{\frac{13}{15}}$

(2) $\left(\frac{1}{3^3}\right)^7$ $\because (a^m)^n = a^{mn}$

$= \left(\frac{1}{3}\right)^{3\times 7} = (3^{-1})^{21}$ $\because \frac{1}{a} = a^{-1}$

$= 3^{(-1)(21)} = 3^{-21}$

(3) $\frac{11^{\frac{1}{2}}}{11^{\frac{1}{4}}}$ $\because \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, m > n$

$= 11^{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}} = 11^{\frac{2-1}{4}} = 11^{\frac{1}{4}}$

(4) $7^{\frac{1}{2}}.8^{\frac{1}{2}}$ $\because a^m b^m = (ab)^m$

$= (7 \times 8)^{1/2} = 56^{1/2}$

प्रश्न : निम्नलिखित व्यंजकों में से प्रत्येक व्यंजक को सरल कीजिए :

(1) $(3+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})$ (2) $(\sqrt{5}+\sqrt{2})^2$

(3) $(3+\sqrt{3})(2+\sqrt{2})$

हल :

(1) $(3+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})$ $[\because (a+b)(a-b) = a^2 - b^2\ ]$

$= (3)^2 - (\sqrt{3})^2$

$= 9 - 3$

$= 6$

(2) $(\sqrt{5}+\sqrt{2})^2$ $[\ \because (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2\ ]$

$= (\sqrt{5})^2 + 2(\sqrt{5})(\sqrt{2}) + (\sqrt{2})^2$

$= 5 + 2\sqrt{10} + 2 = 7 + 2\sqrt{10}$

(3) $(3 + \sqrt{3})(2 + \sqrt{2})$

$= 3(2 + \sqrt{2}) + \sqrt{3}(2 + \sqrt{2})$

$= 6 + 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + \sqrt{6}$

प्रश्न : निम्नलिखित के हरों का परिमेयकरण कीजिए :

(1) $\frac{1}{\sqrt{7}}$ (2) $\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}}$ (3) $\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$ (4) $\frac{1}{\sqrt{7}-2}$

हल : (1) हम जानते हैं $\sqrt{7}.\sqrt{7} = 7$ परिमेय संख्या है।

$\therefore \frac{1}{\sqrt{7}} = \frac{1}{\sqrt{7}} \times \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{7}$

(2) $\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}}$ को $\sqrt{7} + \sqrt{6}$ से गुणा और भाग देने पर।

$\therefore \frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}} \times \frac{\sqrt{7}+\sqrt{6}}{\sqrt{7}+\sqrt{6}}$ $[\because (a+b)(a-b) = a^2 - b^2]$

$= \frac{\sqrt{7}+\sqrt{6}}{7-6} = \sqrt{7} + \sqrt{6}$

(3) $\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$ को $\sqrt{5} - \sqrt{2}$ से गुणा और भाग देने पर।

$\therefore \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$ $[\because (a+b)(a-b) = a^2 - b^2]$

$= \frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{5-2}$

$= \frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{3}$

(4) $\frac{1}{\sqrt{7}-2}$ को $\sqrt{7} + 2$ से गुणा और भाग देने पर।

$\therefore \frac{1}{\sqrt{7}-2} = \frac{1}{\sqrt{7}-2} \times \frac{\sqrt{7}+2}{\sqrt{7}+2}$ $[\because (a+b)(a-b) = a^2 - b^2]$

$= \frac{\sqrt{7}+2}{7-4}$

$= \frac{\sqrt{7}+2}{3}$

प्रश्न : सरल कीजिए।

(1) $2^{\frac{2}{3}}.2^{\frac{1}{5}}$ (2) $\left(\frac{1}{3^3}\right)^7$ (3) $\frac{11^{\frac{1}{2}}}{11^{\frac{1}{4}}}$ (4) $7^{\frac{1}{2}}.8^{\frac{1}{2}}$

हल : (1) $2^{\frac{2}{3}}.2^{\frac{1}{5}}$ $\because a^m.a^n = a^{m+n}$

$= 2^{\frac{2}{3}+\frac{1}{5}} = 2^{\frac{10+3}{15}} = 2^{\frac{13}{15}}$

(2) $\left(\frac{1}{3^3}\right)^7$ $\because (a^m)^n = a^{mn}$

$= \left(\frac{1}{3}\right)^{3\times 7} = (3^{-1})^{21}$ $\because \frac{1}{a} = a^{-1}$

$= 3^{(-1)(21)} = 3^{-21}$

(3) $\frac{11^{\frac{1}{2}}}{11^{\frac{1}{4}}}$ $\because \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, m > n$

$= 11^{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}} = 11^{\frac{2-1}{4}} = 11^{\frac{1}{4}}$

(4) $7^{\frac{1}{2}}.8^{\frac{1}{2}}$ $\because a^m b^m = (ab)^m$

$= (7 \times 8)^{1/2} = 56^{1/2}$

अभ्यास प्रश्न –

1. एक परिमेय संख्या तथा एक अपरिमेय संख्या का योग अथवा अंतर एक संख्या होगी :
   (अ) परिमेय संख्या (ब) अपरिमेय संख्या
   (स) शून्य (द) इनमें से कोई नहीं
2. सभी परिमेय एवं अपरिमेय संख्याओं को एक साथ लेने पर .....का संग्रह प्राप्त होता है।
3. एक परिमेय संख्या का दशमलव प्रसार किस प्रकार का होता है?
4. एक.....संख्या का दशमलव प्रसार अनवसानी अनावर्ती होता है।
5. संख्या s को अपरिमेय संख्या कहा जाता है, यदि इसे $\frac{p}{q}$ के रूप में लिखा जा सकता है, जहां p और q पूर्णांक हैं तथा $q \neq 0$ है (सत्य/असत्य)
6. प्रत्येक पूर्णांक एक परिमेय संख्या होती है (सत्य/असत्य)
7. निम्नलिखित में से हर का परिमेयकरण कीजिए
   (अ) $\frac{1}{\sqrt{7}\sqrt{6}}$ (ब) $\frac{5}{\sqrt{3}\sqrt{5}}$ (स) $\frac{1}{\sqrt{7}}$ (द) $\frac{1}{\sqrt{7}-2}$

8 निम्नलिखित को सरल कीजिए :–

(i) $(3+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})$

(ii) $(3+\sqrt{3})(2+\sqrt{2})$

(iii) $(\sqrt{5}+\sqrt{2})^2$

(iv) $(\sqrt{5}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+\sqrt{2})$

(v) $(\frac{1}{3})^7$

(vi) $125^{-\frac{1}{3}}$

(vii) $\frac{11^{\frac{1}{2}}}{11^{\frac{1}{4}}}$

(viii) $7\frac{1}{2} \cdot 8\frac{1}{2}$

9 दिखाइए की $1.272727 = 1.\overline{27}$ को $\frac{p}{q}$ के रूप में व्यक्त कर सकतें हैं।

10 परिमेय संख्याओं $\frac{5}{7}$ और $\frac{9}{11}$ के बीच तीन अलग–अलग परिमेय संख्यांए ज्ञात कीजिए।

11 निम्नलिखित में बताइए कौन सी संख्या परिमेय या अपरिमेय है।

(i) $5\sqrt{2}-3\sqrt{2}$

(ii) $\frac{2\sqrt{3}}{5\sqrt{3}}$

(iii) $\frac{2\sqrt{7}}{7}$

(iv) $7\sqrt{2}-(7\sqrt{2}+5)$

(v) 0

(vi) 5

12) 1 और 2 के बीच की पाँच परिमेय संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

13) $\frac{7}{9}$ और $\frac{8}{9}$ के बीच की छः परिमेय संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

14) निम्नलिखित को $\frac{p}{q}$ के रूप में व्यक्त कीजिए, जहाँ p और q पूर्णांक हैं तथा $q \neq 0$ है :

(i) $0.\overline{8}$ (ii) $0.2\overline{35}$ (iii) $1.\overline{27}$

<u>स्मरणीय बिंदु</u> : ऐसी संख्या जिसे $\frac{p}{q}$ के रूप में व्यक्त किया जा सकता हो, जहाँ p और q पूर्णांक हैं और $q \neq 0$ है, को परिमेय संख्या कहते हैं।

- ऐसी संख्या जिसे $\frac{p}{q}$ के रूप में व्यक्त नहीं किया जा सकता हो, जहाँ p और q पूर्णांक हैं और $q \neq 0$ है, को अपरिमेय संख्या कहते हैं।
- सभी परिमेय और अपरिमेय संख्याओं को एक साथ लेने पर वास्तविक संख्याओं का संग्रह प्राप्त होता है।
- संख्या रेखा के प्रत्येक बिंदु के संगत एक वास्तविक संख्या होती है। साथ ही प्रत्येक वास्तविक संख्या के संगत संख्या रेखा पर एक अद्वितीय बिंदु होता है।

<u>अध्याय – 2 – बहुपद</u>

शिक्षकों के लिए निर्देश :

(i) इस अध्याय हेतु कुल 6 अंक आवंटित हे।

1 अंक – 2 प्रश्न (वस्तुनिष्ठ प्रश्न)

2 अंक – 2 प्रश्न (लघुउत्तरीय प्रश्न)

(ii) शिक्षक बच्चों को एक चर वाले बहुपद , बहुपद के शून्यक ,शेषफल प्रमेय बहुपदों का गुणनखण्डन एवं बीजीय सर्वसमिकाएँ से संबधित अवधारणाओं से परिचित कराये।

(iii) शिक्षक इन अवधारणाओं को विकसित करने के लिए चर्चा एवं प्रश्नोत्तर विधि का उपयोग कर सकते है।

(iv) शिक्षक व्याख्यान विधि प्रदर्शन विधि, आगमन एवं निगमन विधि का उपयोग कर सकते है।

पिछली कक्षाओं में , छात्र बीजीय व्यंजकों और उनके जोड़, घटाना, गुणा और भाग का अध्ययन कर चुके है। कुछ सर्वमिकाओं का उपयोग व्यंजकों के गुणनखण्ड ज्ञात करने मे किया जा चुका हे।

इस अध्याय में एक विशेष प्रकार का व्यंजक जिसे बहुपद कहा जाता है। का अध्ययन किया जायेगा। यहॉ शेषफल प्रमेय , गुणनखण्ड प्रमेय और बहुपदों के गुणवखण्ड में इनके उपयोग का भी अध्ययन किया जायेगा । हम कुछ और बीजीय सर्वमिकाओं का और कुछ दिए हुए व्यंजकों का गुणनखण्ड करने तथा मान निकालने के बारे में अध्ययन करेगे।

विषयवस्तु प्रस्तुतीकरण

गतिविधि –1

एक चर वाले बहुपद :

आप $2x, x^2 + 2x, x^3 - x^2 + 4x + 7$ जैसे अन्य बीजीय व्यंजकों से भी परिचित है। ध्यान दीजिये कि अभी तक लिए गए सभी बीजीय व्यंजकों में चर के घातांक पूर्ण संख्या ही रहे। इस रूप के व्यंजकों को चर एक वाला बहुपद कहा जाता है। उदाहरण के लिए $x^3 - x^2 + 4x + 7$, चर x में एक बहुपद है। इसी प्रकार $3y^2 + 5y$, चर y में एक बहुपद है और $t^2 + 4t$ चर t में एक बहुपद है।

उदाहरण : नीचे दिए गए प्रत्येक बहुपद की घात ज्ञात कीजिए।

$(i)\ x^5 - x^4 + 3 \quad (i) 2 - y^2 - y^3 + 2y^8$

हलः $(i) x^5 - x^4 + 3$

चर का अधिकतम घातांक 5 है। अतः बहुपद की घात 5 है।

$(ii)\ 2 - y^2 - y^3 + 2y^8$

चर का अधिकतम घातांक 8 है। अतः बहुपद की घात 8 है।

निर्देश : (i) इसके उपरांत शिक्षक पुस्तिका में दिये गये उदाहरणों का अभ्यास बच्चो से करा सकते है।

(ii) प्रश्नावली 2.1 में दिये गये प्रश्नों को हल कराये।

विषय वस्तु प्रस्तुतीकरण (बहुपद का शून्यक)

गतिविधि :–1

निम्नलिखित बहुपद लीजिएः

$P(x) = 5x^3 - 2x^2 + 3x - 2$

$P(x)$ में x के स्थान पर 1 प्रतिस्थापित करें, तो हमें यह प्राप्त होता है।

$P(1) = 5 \times (1)^3 - 2(1)^2 + 3 \times 1 - 2$

$= 5 \times 1 - 2 \times 1 + 3 - 2$

$= 5 - 2 + 1$

$= 3 + 1$

$= 4$

अतः हम कहते है कि $x = 1$ पर $P(x)$ का मान 4 है।

उदाहरण : चरों के दिए गए मान पर नीचे दिए गए प्रत्येक बहुपद का मान ज्ञात कीजिए।

$(i)\ x = 1$ पर $p(x) = 5x^2 - 3x + 7$ का मान

$(ii) y = 2$ पर $q(y) = 3y^3 - 4y + \sqrt{11}$ का मान

गतिविधि–2

अब $P(x) = x - 1$ में x के स्थान पर 1 लेने पर $P(1) = 1 - 1 = 0$

प्राप्त होता है , इसलिए हम कहते है कि बहुपद $P(x)$ का शून्यक 1 है।

अतः व्यापक रूप से कहते है कि बहुपद $P(x)$ का शून्यक एक ऐसी संख्या c है कि $P(c) = 0$ हो।

उदाहरण : सत्यापित कीजिए कि 2 और 0 बहुपद के $x^2 - 2x$ शून्यक है।

हलः $P(x) = x^2 - 2x$ (माना)

$x = 2$ पर $P(x)$ का मान $P(2)$

$= 2^2 - 2 \times 2$

$= 4 - 4$

$= 0$

और

$x = 0$ पर $P(x)$का मान $P(0)$

$= 0^2 - 2 \times 0$

$= 0 - 0$

$= 0$

अतः 2 ओर 0 दोनों ही बहुपद $x^2 - 2x$ के शून्यक है।

निर्देशः (i) शिक्षक बच्चो से उदाहरण में दिये गये प्रश्नों को हल कराये।

(ii) प्रश्नावली में दिये गये प्रश्नों को कक्षा कार्य एवं गृह कार्य के रूप में पूर्ण करा सकते है।

(iii) बच्चो को रैखिक बहुपद, द्विघातीय बहुपद और त्रिघातीय बहुपदों में कुल संभावित शून्यकों को निकालने का अभ्यास भी कराया जा सकता है।

विषय वस्तु प्रस्तुतीकरण (शेषफल प्रमेय)

गतिविधि :–1

हम दो संख्याएँ 15 और 6 ले। जब 15 को 6 से भाग दिया जाये तो हमें भागफल 2 और शेषफल 3 प्राप्त होता है।

इसे इस प्रकार से लिख सकते है :

$$15 = 6 \times 3 + 2$$

अब यदि 15 को 3 से भाग दिया जाये तो भागफल 5 और शेषफल 0 प्राप्त होता है।

इसे इस प्रकार से लिखा जा सकता है :

$$15 = 3 \times 5 + 0$$

हम यहाँ पाते है कि 3 संख्या 15 का एक गुणनखण्ड है तथा संख्या 15, 3 का एक गुणज है।

गतिविधि –2

अब हम बहुपद $3x^2 + x + 1$ को एकपदी x से भाग देते है।

$$\frac{3x^2 + x + 1}{x} = \frac{3x^2}{x} + \frac{x}{x} + \frac{1}{x}$$

$$= 3x + 1 + \frac{1}{x}$$

अतः हम पाते है कि भागफल $3x + 1$ तथा शेषफल 1 हे।

अतः एकपदी, बहुपद $3x^2 + x + 1$ का गुणखण्ड नहीं है।

अब हम बहुपद $2x^3 + x^2 + x$ को एकपदी x से भाग दे।

$$\frac{2x^3+x^2+x}{x} = \frac{2x^3}{x} + \frac{x^2}{x} + \frac{x}{x}$$

$$2x^2 + x + 1$$

इसे हम इस प्रकार से लिख सकते है :

$$2x^3 + x^2 + x = x\,(2x^2 + x + 1) + 0$$

अतः यहॉ शेषफल 0 है, और इसलिए भाजक x,भाज्य $2x^3 + x^2 + x$ का एक गुणनखण्ड है।

गतिविधि –3

अब हम $P(x) = x + 3x^2 - 1$ को $g(x) = 1 + x$ से भाग देते है।

$$P(x) = x + 3x^2 - 1 = 3x^2 + x - 1$$
$$g(x) = 1 + x = x + 1$$

$$\begin{array}{r|l} & 3x - 2 \\ \hline x+1 & 3x^2 + x - 1 \\ & 3x^2 + 3x \\ & - \quad - \\ \hline & -2x - 1 \\ & -2x - 2 \\ & + \quad + \\ \hline & 1 \end{array}$$

यहाँ $3x^2 + x - 1 = (x + 1)(3x - 2) + 1$

भाज्य = (भाजक ×भागफल) + शेषफल

व्यापक रूप मैं,

यदि $P(x)$और $g(x)$ ऐसे दो बहुपद हो कि $P(x)$ की घात $\geq g(x)$ की घात और $g(x) \neq 0$,तो हम ऐसे बहुपद $q(x)$ और $r(x)$ प्राप्त कर सकते है जिससे कि

$P(x) = g(x)q(x) + r(x)$

जहाँ $r(x) = 0$ या $r(x)$ की घात $< g(x)$ की घात

अब हम $P(x) = 3x^2 + x - 1$ में $x = -1$ प्रतिस्थापित करते है :

$P(1) = 3(-1)^2 + (-1) - 1$

$= 3 - 1 - 1$

$= 3 - 2$

$= 1$

यहॉ हम पाते है कि, $P(x) = 3x^2 + x - 1$ को $x + 1$से भाग देने पर जो शेषफल प्राप्त होता है , वो वही है जो कि बहुपद $P(x)$ में $x = -1$ रखने पर प्राप्त होता है, जो कि भाजक $x + 1$ का एक शून्यक है ।

अब उपरोक्त वर्णन के आधार पर हम शेषफल प्रमेय को इस प्रकार से परिभाषित कर सकते है :

शेषफल प्रमेयः मान लिजिये $P(x)$एक से अधिक या एक के बराबर घात एक बहुपद है और मान लीजिए α कोई वास्तविक संख्या है। यदि $P(x)$ को रैखिक बहुपद $x - \alpha$ से भाग दिया जाये तो , शेषफल $P(\alpha)$ होता है।

उदाहरणः $x^4 + x^3 - 2x^2 + x + 1$ को $x - 1$ से भाग देने पर शेषफल ज्ञात कीजिए।

हलः $P(x) = x^4 + x^3 - 2x^2 + x + 1$

भाजक $g(x) = x - 1$का शून्यक 1 है। अतः शेषफल प्रमेय से

शेषफल $P(1) = 1^4 + 1^3 - 2(1)^2 + 1 + 1$

$= 1 + 1 - 2 + 2$

$= 2$

निर्देश : शिक्षक भागफल विधि एवं शेषफल प्रमेय से शेषफल निकालने का अभ्यास बच्चों से कराये।

विषयवस्तु प्रस्तुतीकरण 4 (बहुपदों का गुणनखंडन)

बहुपद $q(t) = 4t^3 + 4t^2 - t - 1,$ को

$g(t) = 2t + 1$ से भाग देने पर प्राप्त शेषफल

$$r(t) = 4\left(-\frac{1}{2}\right)^3 + 4\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(-\frac{1}{2}\right) - 1$$

$$= -4 \times \frac{1}{8} + 4 \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - 1$$

$$= -\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} - 1$$

$$= 0$$

होगा , जिसे इस प्रकार से लिखा जा सकता है :

$q(t) = g(t) \times$ भागफल $+ 0$

$q(t) = g(t) \times$ भागफल $+ 0$

अर्थात भाजक $g(t)$ भाज्य $q(t)$ का एक गुणनखण्ड हुआ, इस आधार पर गुणनखण्ड प्रमेय को इस प्रकार से परिभाषित कर सकते हैः

गुणनखण्ड प्रमेयः

यदि $P(x)$ घात $n \geq 1$ वाला एक बहुपद हो और a ˙ कोई वास्तविक संख्या हो तो,

1. $x - a, P(x)$ का एक गुणनखण्ड होता है, यदि $P(a) = 0$ हो और
2. $P(a) = 0$ होता है, यदि $x - a, P(x)$का एक गुणनखण्ड हो।

निर्देशः शिक्षक उदाहरण एवं प्रश्नावली के प्रश्नों के माध्यम से बच्चो को अभ्यास कराये।

विषयवस्तु प्रस्तुतीकरण (बीजीय सर्वसमिकाएँ)

गतिविधि :–

आप यह जानते है कि बीजीय सर्वसमिका (Algebraic Identity)एक बीजीय समीकरण होती है ˙ जो चरो के सभी मानों के लिए सत्य होती है।

आप निम्नलिखित सर्वसमिकाओं का अध्ययन कर चुके है :

(i) $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

(ii) $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$

(iii) $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$

(iv) $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$

(v) $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$

(vi) $(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y) = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

(vii) $(x - y)^3 = x^3 - y^3 - 3xy(x - y) = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

$(viii)$ $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^3 + y^3 + z^3 - xy - yz - zx)$

उदाहरणः$= \frac{25}{4}x^2 - \frac{y^2}{9}$ के गुणखण्ड ज्ञात कीजिए।

हलः $= \frac{25}{4}x^2 - \frac{y^2}{9}$

$$= \left(\frac{5}{2}x\right)^2 - \left(\frac{y}{3}\right)^2$$

$= \left(\frac{5}{2}x + \frac{y}{3}\right)\left(\frac{5}{2}x - \frac{y}{3}\right)$ सर्वसमिका $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ से

निर्देशः

1. शिक्षक उपरोक्त सर्वसमिका को बच्चों से याद करने का अभ्यास कक्षा में ही करा सकते हे।
2. उपरोक्त सर्वसमिकाओं के उपयोग से भिन्न भिन्न प्रश्नों को हल कराया जाए।

स्मरणीय बिन्दु :

1. एक चर वाला बहुपद $P(x)$ निम्न रूप का x में एक बीजीय व्यंजक है।

   $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots\ldots + a_2\, x^2 + a_1\, x + a_0$ जहॉ

   $a_{0,}a_{1,}a_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots a_{n,}$ अचर है और $a_n \neq 0,$ है।

   $a_{0,}a_{1,}a_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots a_{n,}$ क्रमशः $x^0, x, x^2 \ldots\ldots\ldots x^n$ के गुणांक है और nको बहुपद की घात कहा जाता है। प्रत्येक $a_n x^n, a_{n-1}x^{n-1}, \ldots\ldots\ldots\ldots a_0$जहॉ $a_n \neq 0$ को बहुपद $P(x)$ का पद कहा जाता है।
2. एक पद, दो पद एवं तीन पद वाले बहुपदों को क्रमशः एकपदी , द्विपदी एवं त्रिपदी कहा जाता है।
3. एक घात, दो घात एवं तीन घात वाले बहुपदों को क्रमशः रैखिक, द्विघात एंव त्रिघात बहुपद कहा जाता है।
4. वास्तविक संख्या $'a'$ बहुपद $P(x)$ का एक शून्यक होती है , यदि $P(a) = 0$ हो।
5. एक चर में प्रत्येक रैखिक बहुपद का एक अद्वितीय शून्यक होता हे। एक शून्येतर अचर बहुपद का कोई शून्यक नही है। और प्रत्येक वास्तविक संख्या शून्य बहुपद का एक शून्यक होती है।

6. शेषफल प्रमेयः यदि $P(x)$ एक से अधिक या एक के बराबर घात वाला एक बहुपद हो और $P(x)$ को रैखिक बहुपद $x-a$ से भाग दिया गया हो तो शेषफल $P(a)$ होता है।
7. यदि $P(a)=0$ हो , तो $x-a$ बहुपद $P(x)$का एक गुणनखण्ड होता है और यदि $x-a, P(x)$ का एक गुणखण्ड हो, तो $P(a)=0$ होता है।

अभ्यास प्रश्न

प्रश्न 1. सही विकल्प चुनिये।

1. निम्न लिखित में कौन एक बहुपद है।
   $(a)\ \frac{x^2}{2}-\frac{2}{x^2}$ $(b)\ \sqrt{2x}-1$ $(c)\ x^2+\frac{3x^{3/2}}{\sqrt{x}}$ $(d)\ \frac{x-1}{x+1}$
2. बहुपद $4x^2+Ox^3++Ox^5+5x+7$ की घात है।
   $(a)\ 4$ $(b)\ 5$ $(c)\ 3$ $(d)\ 7$
3. यदि $P(x)=x^2-2\sqrt{2}x+1$ हे, तो $P(2\sqrt{2})$बराबर है।
   $(a)\ 0$ $(b)\ 1$ $(c)\ 4\sqrt{2}$ $(d)\ 8\sqrt{2}+1$
4. यदि $P(x)=x+3$ है , तो $P(x)+P(-x)$ बराबर है।
   $(a)\ 3$ $(b)\ 2x$ $(c)0$ $(d)\ 6$
5. बहुपद $P(x)=2x+5$ का शून्यक हैं
   $(a)\ \frac{-2}{5}$ $(b)\frac{-5}{2}$ $(c)\frac{2}{5}$ $(d)\ \frac{5}{2}$
6. $x+1$ निम्नलिखित बहुपद का एक गुणखण्ड है।
   $(a)\ x^3+x^2-x+1$ $(b)x^3+x^2+x+1$
   $(c)\ x^4+x^3+x^2+1$ $(d)\ x^4+3x^3+3x^2+x+1$
7. यदि $x^{51}+51$ को $x+1$ से भाग दिया जाय तो शेषफल है।
   $(a)\ 0$ $(b)\ 1$ $(c)490$ $(d)150$
8. 249^2-248^2 का मान हे।
   $(a)\ 1$ $(b)\ 477$ $(c)487$ $(d)497$
9. यदि $a+b+c=0$ है , तो $a^3+b^3+c^3$ बराबर है।
   $(a)\ 0$ $(b)\ abc$ $(c)3abc$ $(d)2abc$
10. बहुपद $5x-4x^2+3$ का मान जब $x=2$ हो , तो है।
   $(a)\ 10$ $(b)-3$ $(c)12$ $(d)3$

प्रश्न 2. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिएं।

1. बहुपद में सबसे बड़े घात वाले घातांक को बहुपद का .....कहते है।
2. अशून्य अचर पद की घात सदेव .....होती है।
3. रेखीय बहुपद में चर की अधिकतम घात .....होती है।
4. बहुपद x^3-x^2+1 में x^2 का गुणांक .....है।
5. बहुपद $x^2+11x+10$ का एक गुणनखण्ड $(x+1)$ है, तो दूसरा गुणनखण्ड .....होगा।

प्रश्न 3. सत्य/असत्य लिखिए।

1. बहुपद 5 एक एकपदी व्यंजक है।
2. शून्य बहुपद की घात शून्य होती है।
3. अशून्य अचर पद की घात परिभाषित नही है।
4. बहुपद $7x^4 + 2x$ एक द्विघात बहुपद है।
5. $3x + 5$ एक रैखिक बहुपद है।

प्रश्न 4. एक शब्द /वाक्य में उत्तर दीजिए।

1. ऐसा बहुपद जिसके सभी गुणांक शून्य हो, क्या कहलाता है ?
2. ऐसा बहुपद जिसमें केवल एक पद हो, क्या कहलाता है ?
3. केवल दो पदों वाला बहुपद क्या कहलाता हैं ?
4. केवल तीन पदों वाला बहुपद क्या कहलाता है ?
5. एक घात वाले बहुपद को क्या कहते है ?

प्रश्नः 1 सत्यापित कीजिए कि दिखाए गए मान निम्नलिखित स्थिति में संगत बहुपद के शून्यक है या नहीं : $P(x) = x^2 - 1, x = 1, -1$

2 जॉच कीजिए कि $7 + 3x, 3x^3 + 7x$ का एक गुणखण्ड है या नहीं

3 गुणनखण्ड प्रमेय लागू करके बताइए कि $g(x), p(x)$ का एक गुणनखण्ड है या नहीं $P(x) = 2x^3 + x^2 - 2x - 1, g(x) = x + 1$

4 k का मान ज्ञात कीजिए जबकि $(x - 1), P(x) = x^2 + x + k$ का एक गुणनखण्ड हो।

5 गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए : $12x^2 + 7x + 3$.

6 गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए :$49a^2 + 70ab + 25b^2$

7 सर्वसमिका का उपयोग करके निम्नलिखित गुणनफल ज्ञात कीजिए।
$(3 - 2x)(3 + 2x)$

8 सीधे गुणा किए बिना गुणनफल ज्ञात कीजिएः 95×105

9 उपयुक्त सर्वसमिका का उपयोग करके $(-2x + 3y + 2z)^2$ का प्रसार कीजिए।

10 $(2x + 1)^3$ का प्रसारित रूप लिखिए।

11 उपयुक्त सर्वसमिका का उपयोग करके $(102)^3$ का मान ज्ञात कीजिए।

अध्याय – 3 निर्देशांक ज्यामिति

शिक्षको के लिए निर्देश :–

इस अध्याय हेतु कुल 4 अंक निर्धारित है

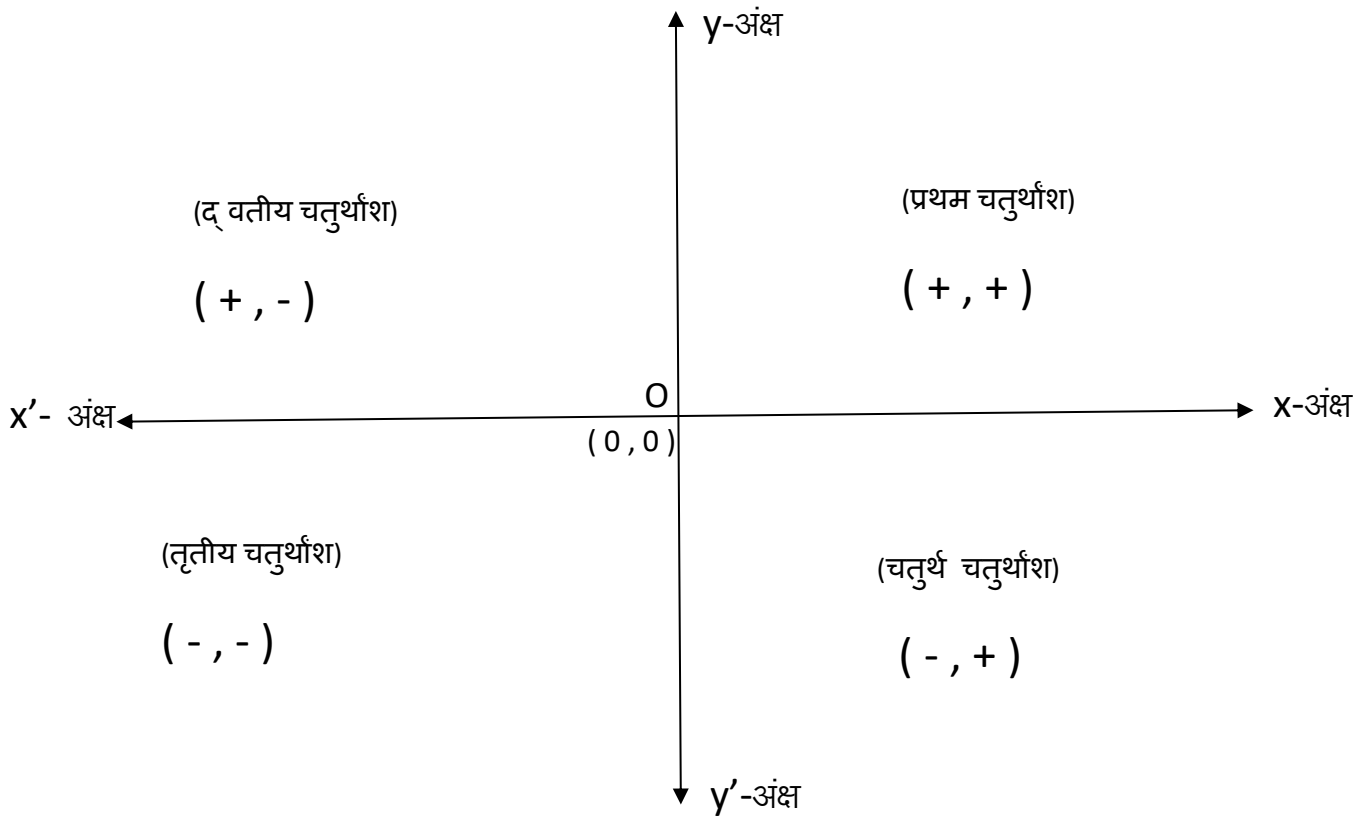
अंकवार प्रश्नों की संख्या				कुल अधिभार
1 अंक	2 अंक	3 अंक	4 अंक	
2	1	–	–	1 + 1 + 2 = 4

छात्र यह पढ़ चुके है कि संख्या रेखा पर एक बिंदु का स्थान निर्धारण किस प्रकार किया जाता है, और यह भी पढ़ चुके है कि एक रेखा पर एक बिंदु की स्थिति की व्याख्या किस प्रकार की जाती है। अनेक ऐसी स्थितियाँ हैं, जिनमें एक बिंदु ज्ञात करने के लिए हमें एक से अधिक रेखाओं के संदर्भ में उसकी स्थिति की व्याख्या करनी होती है। इस विषय में इस अध्याय में हम विस्तार से चर्चा करेंगे।

शिक्षकों से अपेक्षित हैं कि छात्रों द्वारा बिंदुओ की विभिन्न स्थितियों के स्थान निर्धारण के संबंध में हो रहीं गलतियों को दूर करने का प्रयास करें, तथा बिंदुओं के निर्देशांको की अवधारणा को विविध व्यावहारिक उदाहरणों, क्रियाकलापो के माध्यम से स्पष्ट करने का प्रयास करें।

विषयवस्तु :–

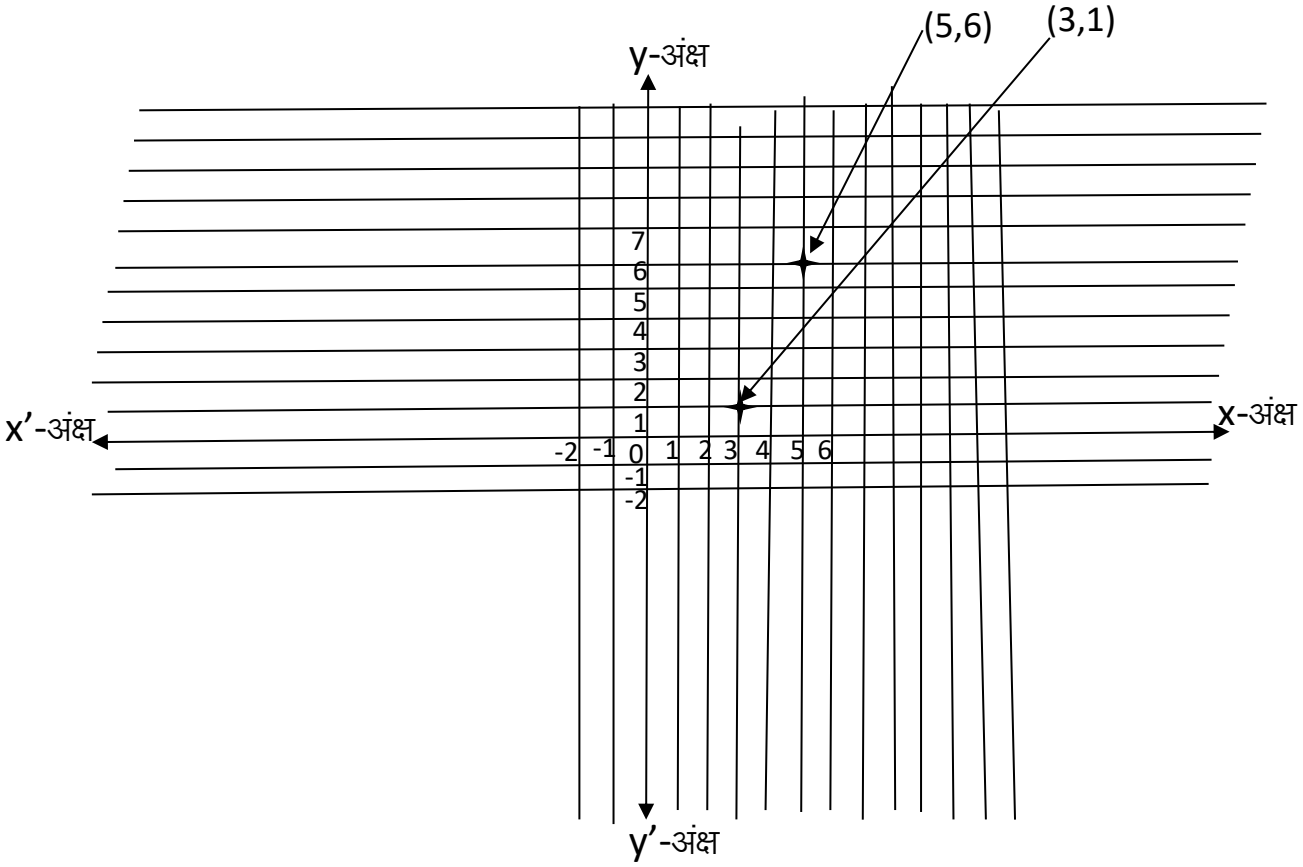
कार्तीय तल में दो रेखायें xx’ और yy’ लेते हैं जो एक दूसरे पर लम्बवत् होती हैं। निर्देशांक अक्ष कहलाते हैं। क्षैतिज रेखा xx’ जिसे x-अक्ष तथा ऊध्वधिर रेखा yy’ जिसे y-अंक्ष कटते हैं। उक्त दोनों अक्ष एक दूसरे को बिंदु O पर काटती हैं जिसे मूल बिंदु कहते हैं। मूल बिंदु से x की तरफ नापी गई दूरी धनात्मक तथा x’ की तरफ नापी गई दूरी ऋणात्मक होती है। इसी प्रकार मूल बिंदु से y की तरफ नापी गई दूरी धनात्मक तथा y’ की तरफ नापी गई दूरी ऋणात्मक होती है। इसमें इसमें मूल बिंदु को व्यक्त किया जाता है। x-अंक्ष पर y-अक्ष से नापी गई दूरी को भुज तथा y-अंक्ष पर x-अंक्ष से नापी गई दूरी को कोटि कहते हैं। इस प्रकार प्रथम चतुर्थांश में स्थित किसी बिंदु के निर्देशांक (x, y) होगा।



गतिविधि (1) :– पाँसे के खेल द्वारा छात्रों को निर्देशांको के बारे में जानकारी दी जा सकती है। जैसे पाँसे दो रंग के लेते हैं पहला लाल रंग का जो x भुज को व्यक्त करेगा तथा दूसरा नीले रंग का पाँसा जो कोटी व्यक्त करेगा। अब हम पाँसों को फेकते हैं और अवलोकन करते हैं 28 कलाल पाँसे पर आयी संख्या और नीले पाँसे पर आयी संख्या को नोट करते हैं। और इस प्रकार एक टेबल का निर्माण करते हैं–

क्रमांक	लाल पाँसे पर आयी संख्या (भुज)	नीले पाँसे पर आयी संख्या (कोटि)	(x, y)
1	5	6	(5, 6)
2	3	1	(3, 1)

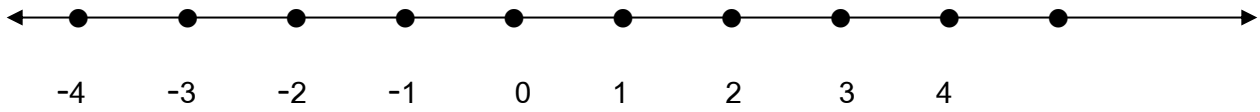
ण्उत्तर : इस प्रकार प्राप्त उपरोक्त निर्देशांक ग्राफ पेपर पर निम्न प्रकार से व्यक्त करते हैं।



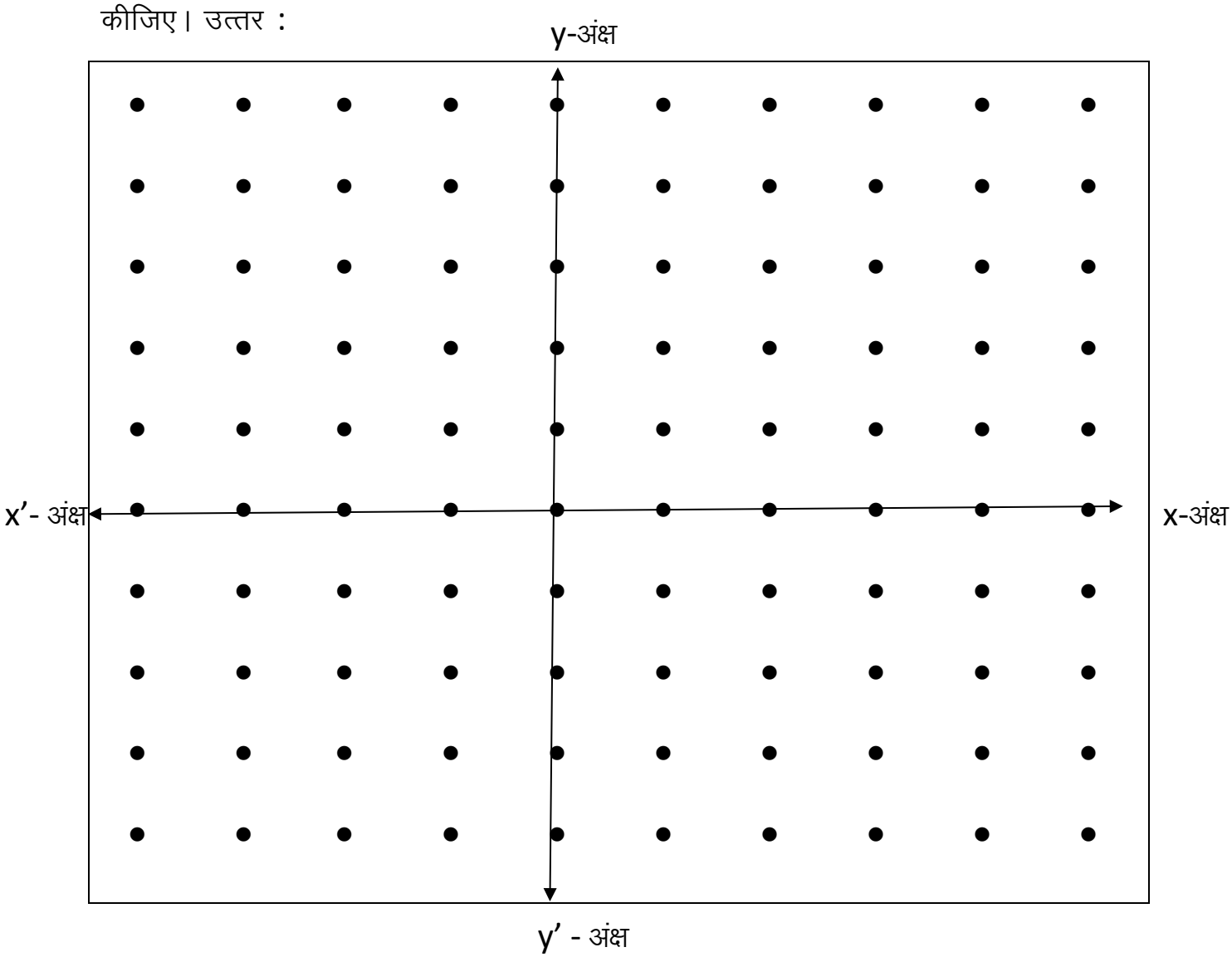
गतिविधि (2) :– प्रश्नावली 3.2 के प्रश्न क्रमांक 2 गतिविधि (प्रश्न मंच) के माध्यम से अभ्यास कराया जाये।

प्रश्न 1 – संख्या रेखा पर . . . . . -3, -2, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ... को प्रदर्शित कीजिए।

उत्तर :



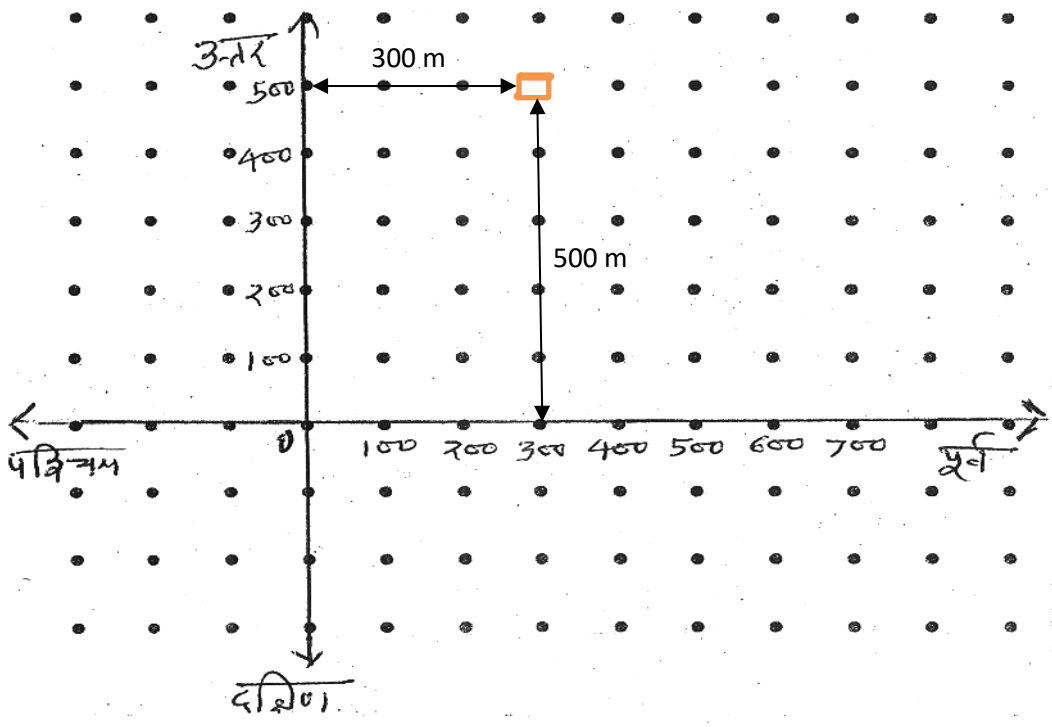
प्रश्न 2 – बिन्दुओं को मिलाते हुए दो लम्बवत रेखाए खीचिए एवं रेखाओं को नामाकिंत कीजिए। उत्तर :



प्रश्न 3 –

(1) श्यामा का घर चौराहे से पूर्व दिशा में 300 मीटर एवं उत्तर दिशा में 500 मीटर की दूरी पर है। श्यामा के घर की स्थिति प्रदर्शित कीजिए।

हल –



(संकेत – 0 चौराहा है।)

प्रश्न 4 – आकृति को देखकर निम्नलिखित को लिखिए –

(i) B में निर्देशांक

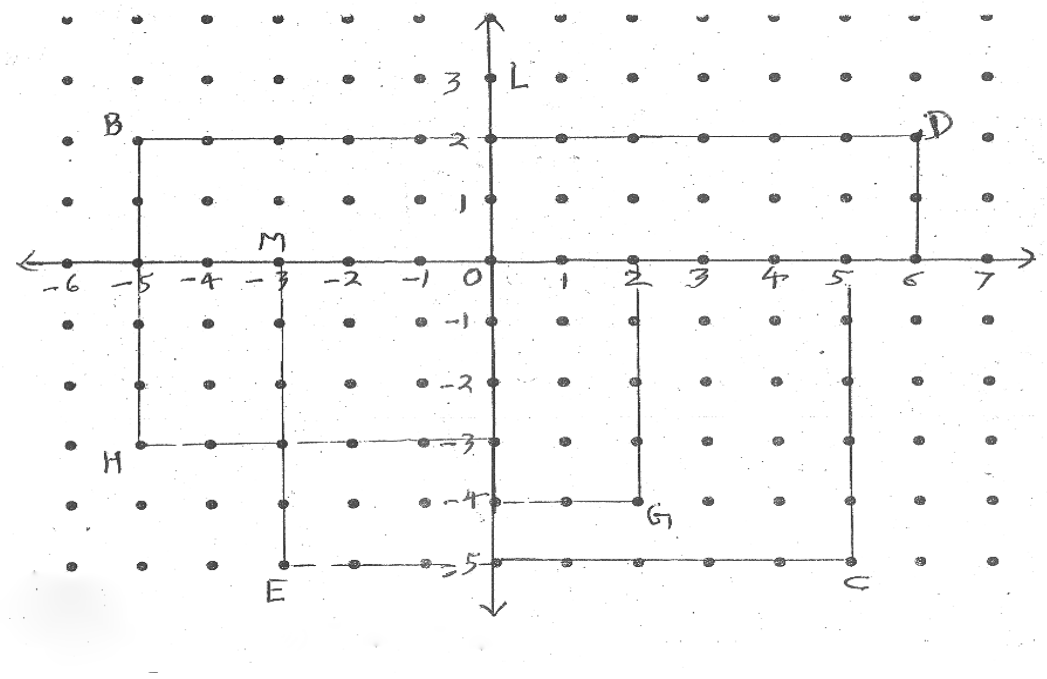
(ii) C के निर्देशांक

(iii) निर्देशांक (–3, –5) द्वारा पहचाना गया बिन्दु

(iv) निर्देशांक (2, –4) द्वारा पहचाना गया बिन्दु

(v) D का भुज 6) बिन्दु H की कोटि

(vi) बिन्दु L के निर्देशांक



उत्तर : (i) B (-5,2) , (ii) (5,-5) , (iii) E , (iv) G , (v) 2 , (vi) (0,3)

स्मरणीय बिन्दु :

(1) एक तल में एक बिंदु का स्थान निर्धारण के लिये दो लाम्बिक रेखाओं की आवश्यकता होती है जिसमें एक क्षैतिज होती है और दूसरी ऊर्ध्वाधर होती है।

(2) तल को कार्तीय या निर्देशांक तल कहा जाता है और रैखाओं का निर्देशांक अक्ष कहा जाता है।

(3) क्षैतिज रेखा को x-अक्ष और ऊर्ध्वाधर रेखा को y-अक्ष कहा जाता है।

(4) निर्देशांक अक्ष तल को चार भागों में बाँट देते हैं जिन्हें चतुर्थांश कहा जाता है।

(5) अक्षो के प्रतिच्छेदन बिंदु को मूलबिंदु कहा जाता है।

(6) y-अंक्ष से किसी बिंदु की दूरी को उसका x-निर्देशांक या भुज कहा जाता है। साथ ही x-अंक्ष से बिंदु की दूरी को y निर्देशांक या कोटि कहा जाता है।

(7) यदि एक बिंदु का भुज x हो तो कोटि y हो तो को (x, y) को बिंदु के निर्देशांक कहा जाता है।

अभ्यास प्रश्न

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

प्रश्न 1 – रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए –

मूल बिन्दु के निर्देशांक . . . . . होते हैं।

(i) बिन्दु (3, 5) के भुज का मान . . . . . है।

(ii) बिन्दु (7, –6) की कोटि का मान . . . . . है।

(iii) किसी तल को दो लम्बवत रेखाएँ . . . . . भागों में विभाजित करती हैं।

(iv) बिन्दु (3, –4) . . . . . चतुर्थांश में स्थित हैं।

(v) बिन्दु (–3, –4) . . . . . चतुर्थांश में स्थित हैं।

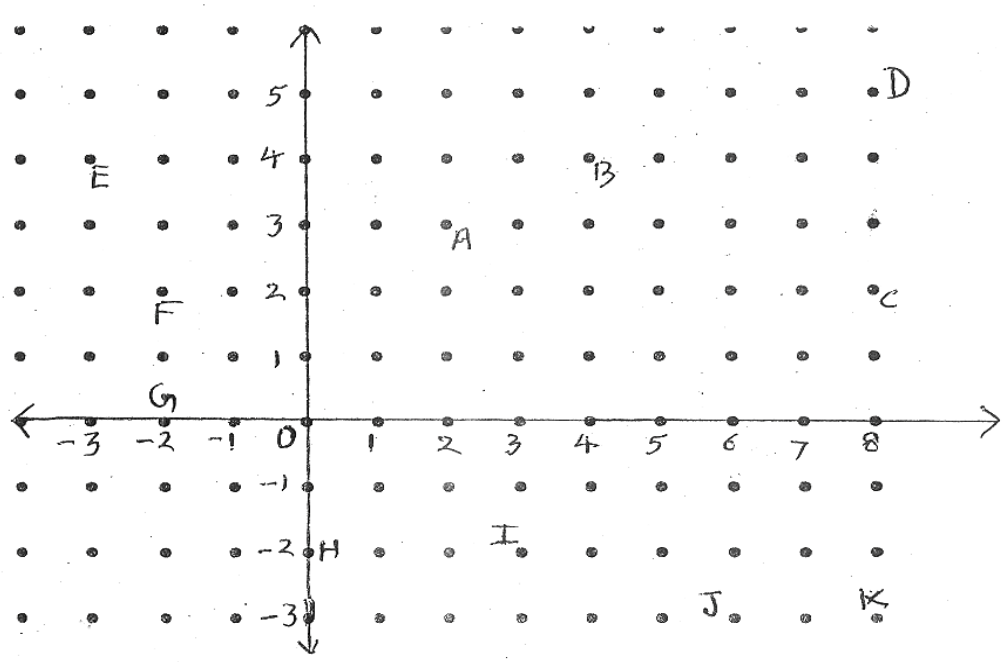
(vi) बिन्दु (3, 4) . . . . . चतुर्थांश में स्थित हैं।

(vii) बिन्दु (–3, 4) . . . . . चतुर्थांश में स्थित हैं।

(viii) बिन्दु (3, 0) . . . . . अंक्ष में स्थित हैं।

(ix) बिन्दु (0, 3) . . . . . अंक्ष में स्थित हैं।

प्रश्न 2 – बिन्दुओं A, B, C, D, E, F, G, H, I, J और K के निर्देशांक लिखिए।



प्रश्न 3 – आकृति को देखकर निम्नलिखित को लिखिए –

(i) B में निर्देशांक

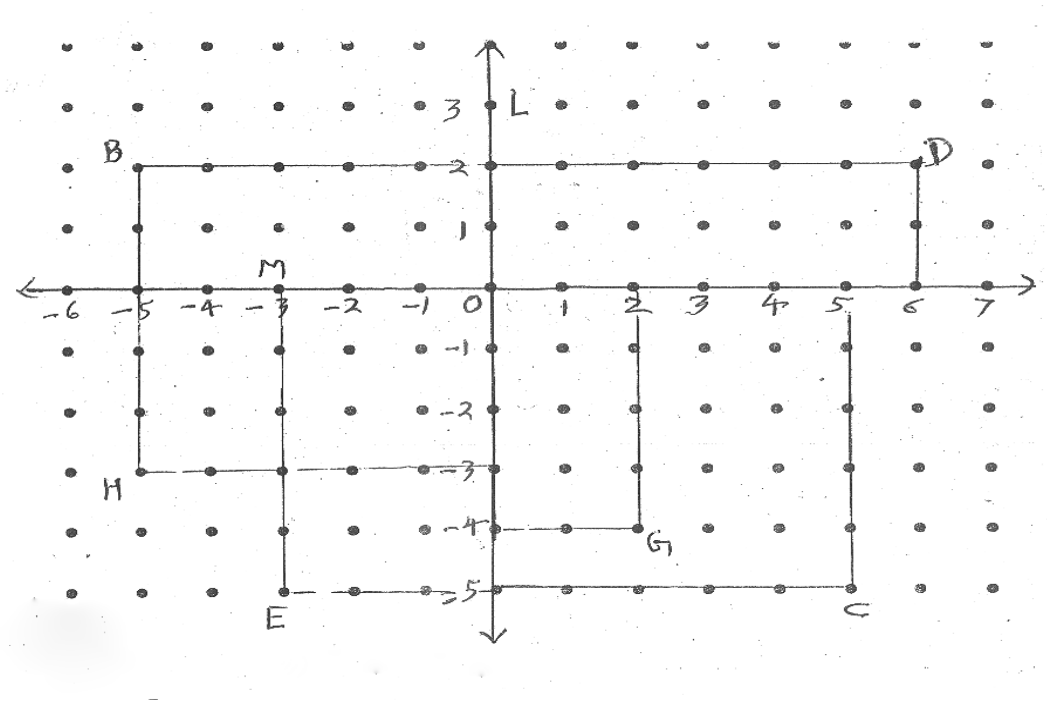
(ii) C के निर्देशांक

(iii) निर्देशांक (–3, –5) द्वारा पहचाना गया बिन्दु

(iv) निर्देशांक (2, –4) द्वारा पहचाना गया बिन्दु

(v) D का भुज 6) बिन्दु H की कोटि

(vi) बिन्दु L में निर्देशांक 8) बिन्दु के निर्देशांक



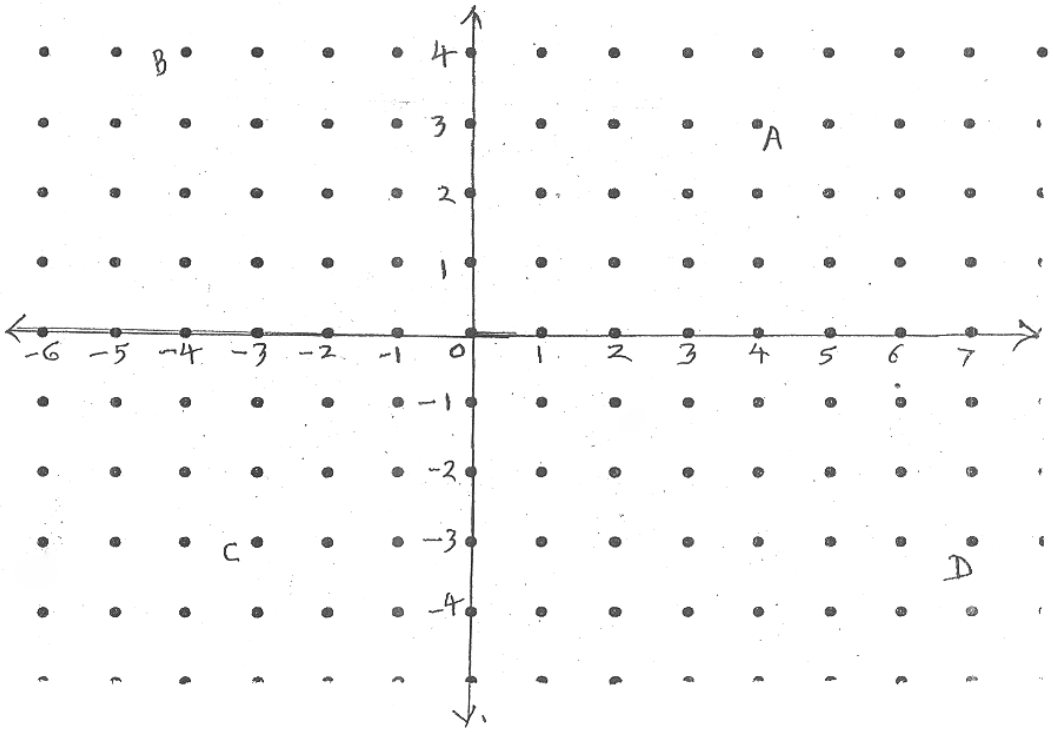
प्रश्न 4 – किस चतुर्थांश में या किस अक्ष पर बिन्दु (-2, 4), (3 -1), (-1, 0), (1, 2) और (-3, -5) स्थित हैं? कार्तीय तल पर उनका स्थान निधारण करके अपने उत्तर को सत्यापित कीजिए अंक

प्रश्न 5 – अक्षों पर दूरी का उपयुक्त एकक लेकर नीचे सारणी में दिए गए बिन्दुओं को तल पर आलेखित कीजिए–

x	-2	-1	0	1	3
y	8	7	-1.5	3	-1

प्रश्न 6 – बिन्दु (1, 2), (5, 6), (-5, 3), (4, -5), (-3, 4), (0, 3), (4, 0), (-5, 0), व (0, 2), किस चतुर्थांश या किस अक्ष पर स्थित हैं।

प्रश्न 7 – आकृति में अंकित बिन्दुओं के निर्देशांक लिखिए –



प्रश्न 7) (i) टीना चौराहे से पूर्व दिशा में 700 मीटर पैदल चलती है फिर उत्तर की ओर मुड़कर 500 मीटर चलती है। टीना की स्थिति को प्रदर्शित कीजिए।

(ii) रवीना चौराहे से 300 मीटर पूर्व में एवं फिर उत्तर की और 400 मीटर चलती है। बताइए चौराहे से रवीना कितनी दूरी पर है।

प्रश्न 8 – कार्तीय तल में बिंदओं (4, 5), (-4, 5), (4, -5), (-4, -5), (5,1), (5, -3), (6, 2) का स्थान निर्धारण कीजिए।

प्रश्न 9 – बिन्दु (1, 2), (5, 6), (-5, 3), (4, -5), (-3, 4), (0, 3), (4, 0), (-5, 0), (0, -2) किस चतुर्थाश या किस अंक्ष पर स्थित है?

अध्याय – 4 दो चरो वाले रैखिक समीकरण

निर्देश

- इस अध्याय में कुल 4 अंकों के प्रश्न पूछे जाने हैं।
- 1 – 1 अंक के दो वस्तुनिष्ठ 2 प्रश्न, और 2 अंक का एक प्रश्न पूछा जाएगा।
- कक्षा में ग्राफिकल बोर्ड अन्यथा सादे बोर्ड पर स्केलिंग करें।
- प्रश्नोत्तर प्रविधि से विद्यार्थियों से उत्तर निकलवायें, ये उनके द्वारा ''स्वंय ज्ञान के निर्माण'' की प्रक्रिया में सहायक विधियों में आगमन –निगमन विधि का भली – भाति अध्ययन करें।

विषयवस्तु प्रस्तुतीकरण

एक चर वाले रैखिक समीकरण का उदाहरण : $2x + 5 = 0$

प्रश्न : समीकरण $2x + 5 = 0$ में कितने चर हैं?

उत्तर : समीकरण $2x + 5 = 0$ में एक चर हैं।

प्रश्न : एक संख्या का दुगना 80 है। इसे एक चरीय समीकरण के रूप में कैसे लिखेंगे।

माना वह संख्या x है तो $2x = 80$

अब हम दो चर माना x व y लेंगे

प्रश्न : दो संख्याओं का योग 176 है। इसका गणितीय रूप क्या होगा? यदि हम दो चर x तथा y का उपयोग करें।

उत्तर : अब हम दो चर..... (माना) x व y लेंगे

तब $x + y = 176$ और इसे दो चरों वाला समीकरण कहेंगे

प्रश्न : ''एक नोट बुक की कीमत, एक कलम की कीमत से 2 रूपये अधिक है।'' इस कथन को निरूपित करने के लिए दो चरो वाला एक रैखिक समीकरण लिखिए। यह मान ले कि नोटबुक की कीमत x रू. है और कलम की कीमत y रू. है।

उत्तर : इस कथन का समीकरण

इस प्रकार होगा

. $x = y + 2$

या $x - y = 2$

(1) प्रश्न : नागपुर में भारत और श्रीलंका के बीच खेले गये एक एक दिवसीय अन्तर्राष्ट्रीय क्रिकेट मैच में दो भारतीय बल्लेबाजों ने एक साथ मिलकर 176 रन बनाए।'' इस जानकारी को एक समीकरण के रूप में कैसे व्यक्त करेंगे?

उत्तर : माना एक बल्लेबाज द्वारा बनाए गए रनों की संख्या x है और दूसरे बल्लेबाज द्वारा बनाए गए रनो की संख्या y है तो

$x + y = 176$

प्रश्न : दो चरो वाले रैखिक समकीरण का सामान्य रूप क्या होगा ?

उत्तर : दो चरो वाले रैखिक समकीरण का सामान्य रूप $ax + by + c = 0$ होगा।

प्रश्न : दो चरों वाले रैखिक समीकरण का उदाहरण दीजिए।

उदाहरण : $7x + 5y + 9 = 0$, $5x - 3y + 6 = 0$ और $2x - y - 7 = 0$

प्रश्न : समीकरण $2x + 3y = 12$ में x और y के कौन–कौन से मान रखे जा सकते हैं, जिससे यह समीकरण सन्तुष्ट हो। (शिक्षक संकेत प्रश्नों का सहारा ले सकते हैं)

उत्तर : $x = 3$, और $y = 2$ रखने पर

$2 \times 3 + 3 \times 2 = 12$ होगा।

$x = 0, y = 4$ रखने पर $2 \times 0 + 3 \times 4 = 12$ होगा।

$x = 1, y = 4$ रखने पर $2 \times 1 + 3 \times 4 \neq 12$.

अत : $x = 1$ व $y = 4$ नहीं रख सकते।

विद्यार्थी अपनी–अपनी कांपियों में हल करके पता लगाएंगे।

$2x+3y = 12$ में x व y के अनेक मान रखें जा सकते हैं।

समीकरण $4x + 3y = 12$ में $x = 0$ लेने पर $y = 4$ प्राप्त होगा।

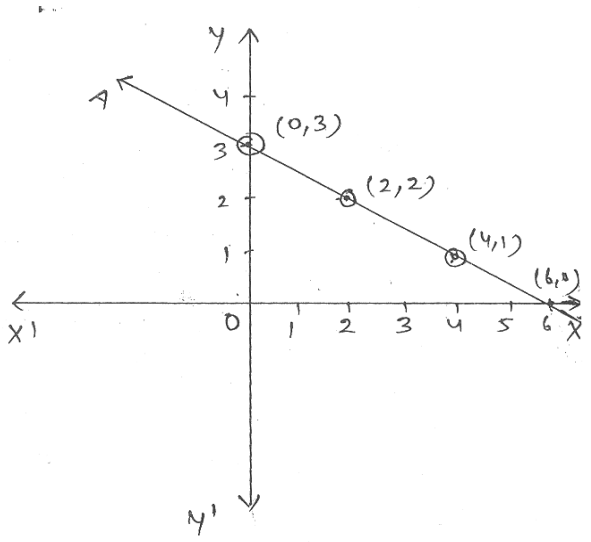
समीकरण $4x + 3y = 12$ में $y = 0$ रखने पर $x = 3$ प्राप्त होगा।

प्रश्न : रैखिक समीकरण $x + 2y = 6$ में निम्न सारणी के अनुसार मान रखकर सारणी पूर्ण कीजिए

x	0	2	4	6
y	- - -	- - -	- - -	- - -

उत्तर :

x	0	2	4	6
y	3	2	1	0

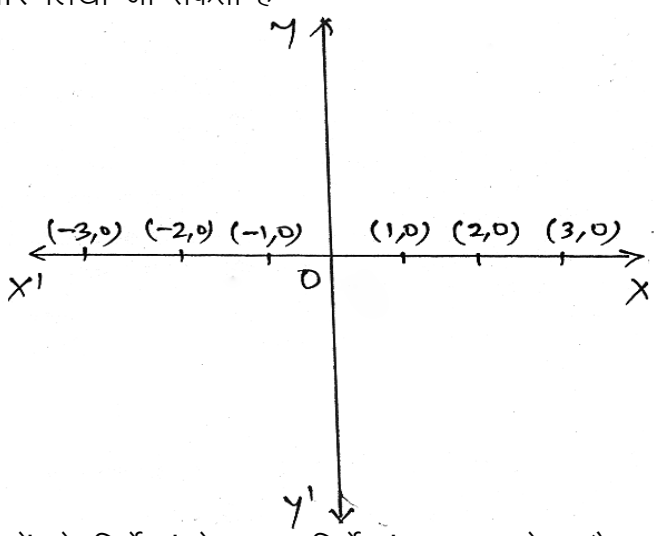


प्रश्न : बिन्दु (1, 0), (2, 0), (-3, 0), (4, 0), और (n, 0) किस अंक्ष पर स्थित होंगे?

उत्तर :

ये बिन्दु x-अंक्ष पर स्थित होंगे।

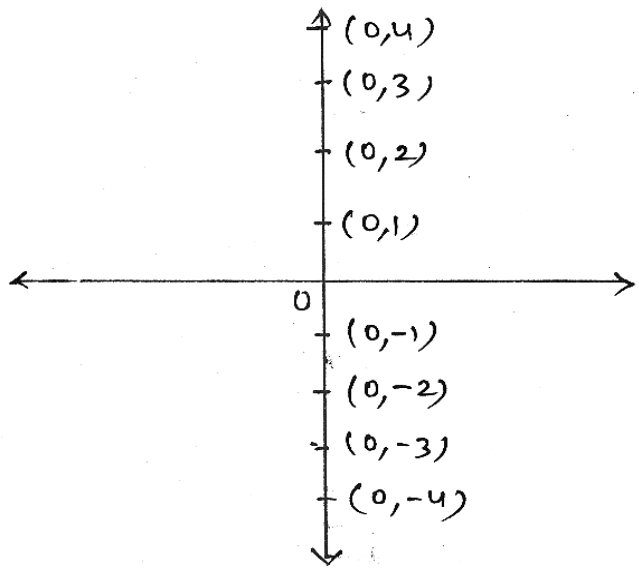
चित्र बनाकर निम्नानुसार लिखा जा सकता है –



x अंक्ष पर स्थित बिन्दुओं के निर्देशांको का y-निर्देशांक शून्य होता है इस निष्कर्ष पर पहुँचें कि x-अंक्ष पर स्थित बिन्दुओं के निर्देशांको (x, y) का y निर्देशांक शून्य होगा। अतः x-अंक्ष का समीकरण y = 0 होगा।

प्रश्न : बिन्दु (0, 1), (0, 2), (0, -3), (0, 4), और (0, m), किस अंक्ष पर स्थित होंगे?

उत्तर : ये बिन्दु y-अंक्ष पर स्थित होंगे। चित्र बनाकर निम्नानुसार दर्शाइए –

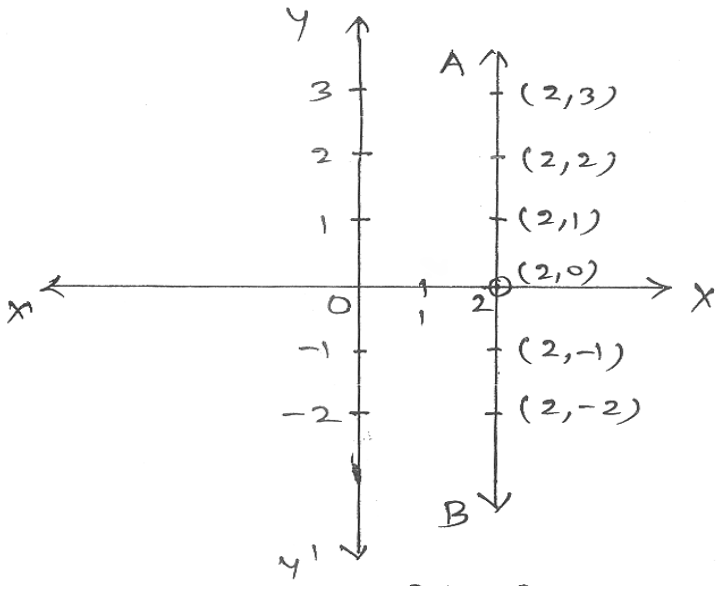


y-अंक्ष पर स्थित बिन्दुओं के निर्देशांको का x-निर्देशांक शून्य होता है

इस निष्कर्ष पर पहुँचें कि y-अंक्ष पर स्थित बिन्दुओं के निर्देशांको (x, y) का x निर्देशांक शून्य होगा। अतः y-अंक्ष का समीकरण $x = 0$ होगा।

और

निम्नानुसार दर्शाइए



निष्कर्ष है कि y-अंक्ष धनात्मक दिशा में 2 इकाई की दूरी पर स्थित समांतर रेखा पर स्थित प्रत्येक बिन्दु के निर्देशांकों का सदैव 2 होगा। अतः y-अंक्ष के समांतर इस रेखा का समीकरण $x = 2$ या $x - 2 = 0$ होगा

अभ्यास प्रश्न

प्रश्न – 1

(i) $3x + 4 = 0$ में चर एवं अचर बताइये।
(ii) $2x + 3y = 12$ में कितने चर हैं?
(iii) $x + 7 = 0$ में x की घात क्या है?
(iv) $2x^2 + 3x + 4 = 0$ में x की घात क्या है?
(v) $x - 4 = 0$ में x का मान क्या होगा?
(vi) यदि $3x = 24$ तो x का मान ज्ञात करो?
(vii) यदि $x + 24 = 0$ तो x का मान ज्ञात करो?
(viii) यदि $\frac{x}{3} = 6$ हो तो x का मान ज्ञात करो?
(ix) यदि $\frac{x}{3} = \frac{2}{7}$ तो x का मान ज्ञात करो।

प्र० 2 – समीकरण $3x + 5 = 7$ को हल कीजिए।

प्र० 3 – समीकरण $8x + 6 = 2x + 24$ को हल कीजिए।

प्र० 4 – एक संख्या एवं उसके दुगुने का योग 27 है इसे समीकरण रूप में लिखो एवं हल करो।

प्र० 5 – किसी संख्या का 3 गुना उसके दुगुने से 5 अधिक है। संख्या ज्ञात करो।

प्र० 6 – किसी संख्या में 4 जोड़ने पर वह स्वंय की दुगुनी हो जाती है संख्या ज्ञात करो।

प्रश्न – 1 सत्य/असत्य लिखिए –
(i) रेखा $y = kx$ मूलबिंदु से जाने वाली रेखा को निरूपित करता है।
(ii) $x = 2$, x-अंक्ष के समान्तर रेखा है।
(iii) $ax + by + c = 0$ को एक घात वाला रैखिक समीकरण कहते हैं।
(iv) $x = 0$, x-अंक्ष का समीकरण है।
(v) $(-2, 0)$, $y = 2x + 4$ का संगत हल है।

प्र० 2 – अमरीका और कनाडा जैसे देशों में तापमान फारेनहाइट में मापा जाता है जबकि भारत जैसे देशों में तापमान सेल्यिस में मापा जाता है यहाँ फारेनहाइट को सेल्यिस में रूपान्तरित करने वाला एक रैखिक समीकरण दिया गया है

$$F = \left(\frac{9}{5}\right) C + 32$$

(i) यदि तापमान 30^0C है, तो फारेनहाइट में तापमान क्या होगा?
(ii) यदि तापमान 0^0 है तो फारेनहाइट में तापमान क्या होगा?

प्र० 3 – एक विद्यालय की कक्षा IX की छात्राएँ यामिनी और फातिमा ने मिलकर भूकंप पीड़ित व्यक्तियों की सहायता के लिए प्रधानमंत्री राहत कोष में 100 रू. अंशदान दिया। एक रैखिक समीकरण लिखिए जो इन आँकड़ो को संतुष्ट करती हो। इस समीकरण का आलेख खीचिएं।

प्रश्न – 4 एक वाक्य/शब्द में उत्तर दो –

(i) $y = 3x + 5$ के कितने हल संभव हैं।

(ii) $2x + y = 7$ के 2 हल लिखिए।

(iii) यदि $x = 2, y = 1$ तो $2x + 3y = k$ में k का मान ज्ञात करो।

(iv) $2x + 9 = 0$ को दो चर के समीकरण के रूप में व्यक्त करो।

(v) x-अंक्ष के समान्तर रेखा का समीकरण लिखो।

प्र० 5 – एक नगर में टैक्सी का किराया निम्नलिखित है, पहले किलोमीटर का किराया 8 रू. है और उसके बाद की दूरी के लिए प्रति किलोमीटर का किराया 8 रू. है। यदि तय की गई दूरी x किलोमीटर हो, ओर कुल किराया y हो तो इसका एक रैखिक समीकरण लिखिए और उसका आलेख खींचिए।

प्र० 6 – एक अचर बल लगाने पर एक पिंड द्वारा किया गया कार्य पिंड द्वारा तय की गई दूरी के अनुक्रमानुपाती होता है इस कथन को दो चरों वाले एक समीकरण के रूप में व्यक्त कीजिए और अचर बल 5 मात्रक लेकर इसका आलेख खींचिए। यदि पिंड द्वारा तय की गई दूरी (i) 2 मात्रक (ii) 0 मात्रक

अध्याय –14 साख्यिकी

शिक्षक के लिए निर्देश :

1. इस अध्याय से वार्षिक परीक्षा में अंकों का अधिभार निम्नानुसार है।
   1 अंक के प्रश्न – 2 प्रश्न और 3 अंक के प्रश्न – 1 प्रश्न
   कुल अंक = 5
2 विद्यार्थी ऑकड़ों को लिखने में गलती न करे। सावधानी पूर्वक प्रश्न से आकड़ो को लिखा जावे।

3 ऑकड़ो को गिनने , गुणा व योग की संक्रियाओं में गलती ना हो।

4 सूत्र का सही उपयोग हो।

5 आलेखन में इकाई आदि ध्यान पूर्वक लिखा जावे।

पुनरावृत्ती में गलतियों को सुधारा जावे।

प्रश्न 1. एक विद्यालय में कक्षा 9वी में 30 विद्यार्थियों द्वारा 100 में से प्राप्त किये गये अंक ये है

10,20,36,92,95,40,50,56,60,70,92,88,80,70,72,70,36,40,36,40,92,40,50,50,56,60,70,60,60,88

इन आकड़ों के लिये बारम्बरता सारणी बनाईये।

हल सारणी

अंक	विद्यार्थियों की संख्या
10	1
20	1
36	3
40	4
50	3
56	2
60	4
70	4
72	1
80	1
88	2
92	3
95	1
	कुल योग : 30

वस्तुनिष्ठ प्रश्नः

प्रश्न.1. वह विज्ञान जो प्रदत्त आकड़ों के संकलन ,विश्लेषण तथा निर्वचन से संबंधित नियमों का अध्ययन करता है कहलाता है।

(a) प्रायिकता (b) बीजगणित (c) सांख्यिकी (d) त्रिकोणमिति

प्रश्न.2. एक निश्चित उद्देश्य से एकत्रित किये गये तथ्यों या अंकों को जो संख्यात्मक या अन्य रूप में हो सकते है। क्या कहते है।

(a) आंकड़े (b) संकेत (c) पूर्ण अंक (d) कोई नहीं

प्रश्न.3. जहॉ किसी स्त्रोत से जिसमें सूचनाऍ पहले से ही एकत्रित है आंकड़े प्राप्त किये गये हो उन आंकड़ों को कहते है :

(a) प्राथमिक ऑकड़े (b) द्वितीयक ऑकड़े (c) तृतीयक ऑकड़े (d) अंक

प्रश्न4. सभी प्रेक्षणों का योग/प्रेक्षणों की कुल सख्ंया =

(a) माध्यक (b) बहुलक (c) माध्य (d) परास

प्रश्न5. माध्य,माध्यक और बहुलक का अध्ययन किया जाता है :

(a) प्राथमिक आकड़ो में (b) केन्द्रीय प्रवृत्ति की माप में

(c) त्रिकोणमिति में (d) बीजगणित में

प्रश्न6. बारम्बरता बहुभुज बनाने के लिये हमें आकड़ो में प्रयुक्त वर्ग अन्तरालों के मध्य बिंदुओं की आवश्यकता होती है। वर्ग अन्तरालों के इन मध्य बिंदुओं को क्या कहते है।

(a) मिलान चिन्ह (b) वर्ग चिन्ह (c) प्राप्तांक (d) कोई नहीं

प्रश्न7. प्रेक्षणों का वह मान जो इसे ठीक 2 भागों में बाटता है क्या कहलाता है ?

(a) माध्यक (b) माध्य (c) बहुलक (d) बहुभुज

प्रश्न8. प्रथम पांच विषम प्राकृत संख्याओं का माध्य क्या होगा ?

(a) 3 (b) 7 (c) 5 (d) 4

प्रश्न9. सबसे अधिक बार आने वाला प्रेक्षण होता है।

(a) माध्य (b) बहुलक (c) माध्यक (d) आयत चित्र

प्रश्न 1.आठवी कक्षा के 30 विद्यार्थियों के रक्त समूह ये है।

A, B, O, O, AB, O, A, O, B, A,O, B, A,O,O, A, AB, O, A, A,O,O, AB, B, A, O,B, A, B, O

इन आकड़ों को बारम्बरता बंटन सारणी के रूप में प्रस्तुत कीजिये। बताइये कि इन विद्यार्थियों में कौन सा रक्त समूह अधिक सामान्य है और कौन सा विरलतम है।

हल : बारम्बरता सारणी :

रक्त समूह	विद्यार्थियों की संख्या
A	9
B	6
AB	3
O	12
Total	30

सबसे अधिक सामान्य रक्त समूह : O

विरलतम रक्त समूह : AB

प्रश्न 2.तीस बच्चों से पूछा गया कि पिछले सप्ताह उन्होने कितने घण्टे टी.वी. प्रोग्राम देखे। प्राप्त परिणाम ये रहे।

1	6	2	3	5	12	5	8	4	8	10	3
4	12	2	8	15	1	17	6	3	2	8	5
9	6	8	7	14	12						

(i) वर्ग –चौड़ाई 5 लेकर और वर्ग अन्तराल को 5–10 लेकर इन आंकड़ो की एक वर्गीकृत

बारम्बारता सारणी बनाईये।

(ii) कितने बच्चो ने सप्ताह में 15 या अधिक घण्टो तक टी.वी.देखी।

हलः वर्ग चोड़ाई 5 लेने के लिये हम वर्ग अंन्तराल 0–5, 5–10... लेते है।

1. वर्गीकृत बारम्बरता सारणी

घण्टे (hours)	बच्चो की संख्या
0-5	10
5-10	13
10-15	5
15-20	2
Total	30

2 बच्चो ने सप्ताह में 15 या अधिक घण्टों तक टी.वी. देखी।

प्रश्न 4.) 5 व्यक्तियों से पूछा गया कि अपने समुदाय के सामाजिक कार्य करने में वे एक सप्ताह में कितना समय देते है? उनका कहना था क्रमशः 10,7,13,20, और 15 घण्टे। एक सप्ताह में उनके सामाजिक कार्य में लगाए समयों का माध्य ज्ञात कीजिए।

हलः

$$\text{माध्य} = \frac{\text{सभी प्रेक्षणों का योग}}{\text{प्रेक्षणों की कुल संख्या}}$$

यहॉ कुल प्रेक्षण 5 है।

$$x_1 = 10, x_2 = 7, x_3 = 13, x_4 = 20, x_5 = 15$$

$$\text{माध्य} = \frac{x_1+x_2+x_3+x_4+x_5}{5}$$

$$= \frac{10+7+13+20+15}{5} = \frac{65}{5} = 13$$

5 व्यक्तियों द्वारा सामाजिक कार्य करने में एक सप्ताह में लगाया गया माध्य 13 घण्टे है।

प्रश्न 5.आकड़ो 14,25,14,28,18,17,18,14,23,22,14,18 का बहुलक ज्ञात कीजिये?

हलः बहुलक सबसे अधिक बार आने वाले प्रेक्षण का मान होता है । दिये हुए आकड़ों में 14 सबसे अधिक 4 बार आया है। अतः बहुलक = 14.

प्रश्न 1. गणित की परीक्षा में 15 विद्यार्थियों ने 100 में से निम्नलिखित अंक प्राप्त किये

41,39,48,52,46,62,54,40,96,52,98,40,42,52,60 इन आकड़ों के माध्य,माध्यक और बहुलक ज्ञात

कीजिये।

हलः माध्य

$$\text{सूत्र माध्य} = \frac{\text{प्रेक्षणों का योग}}{\text{प्रेक्षणों की कुल संख्या}}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{15} x_i}{15}$$

$$= \frac{41+39+48+52+46+62+54+40+96+52+98+40+42+52+60}{15}$$

$$= \frac{822}{15} = 54.8$$

माध्यक : दिये हुए ऑकड़ो को आरोही क्रम में व्यवस्थित करने पर
39,40,40,41,42,46,48,52,52,52,54,60,62,96,98

प्रेक्षणें की संख्या $n = 15$ जो कि विषम संख्या है।

माध्यक $= \left(\frac{n+1}{2}\right)$ वे पद का मान

$= \frac{15+1}{2} = 8$ वे पद का मान

माध्यक $= 52$

बहुलकः दिये हुये प्रेक्षणों में 52 सबसे अधिक 3 बार आया है। अतः बहुलक = 52

क्योंकि बहुलक सबसे अधिक बार आने वाले प्रेक्षण का मान होता है ।

प्रश्न 2. निम्नलिखित ऑकड़ों को आरोही क्रम में व्यवस्थित किया गया है यदि आकड़ों का माध्यक 63 हो,

तो x का मान ज्ञात कीजिये।

$$29, 32, 48, 50, x, x+2, 72, 78, 84, 95$$

हलः यहॉ पर दिये गये ऑकड़े आरोही क्रम में ही व्यवस्थित है। प्रेक्षणों की कुल संख्या $= 10$

10 एक सम संख्या है।

सूत्रः जब n सम संख्या है।

माध्यक $= \frac{1}{2}$ [$\left(\frac{n}{2}\right)$वे पद का मान $+ \left(\frac{n}{2}+1\right)$ वे पद का मान]

दिया गया है : माध्यक $= 63$

$63 = \frac{1}{2}$ [$\left(\frac{10}{2}\right)$ वे पद का मान $+ \left(\frac{10}{2}+1\right)$ वे पद का मान]

$= \frac{1}{2}$ [5 वे पद पद का मान $+6$ वे पद का मान]

$= \frac{1}{2}[x + x + 2]$

$= 63 = \frac{2x+2}{2} = \frac{2(x+1)}{2} \Rightarrow x + 1 = 63$

$\Rightarrow x = 62$

अभ्यास प्रश्न

वस्तुनिठ प्रश्न :

प्रश्न 1: (i) प्रथम पांच सम प्राकृतिक संख्याओं का माध्य होगा :

(a) 4 (b) 5 (c) 6 (d) 7

(ii) यदि n सम संख्या है तब माध्यक =

(a) $\frac{n}{2}$ वे प्रेक्षण का मान (b) $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ वे प्रेक्षण का मान

(c) $\frac{n}{2}$ वे और $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ वे प्रेक्षण का माध्य (d) n वे प्रेक्षण का मान

(iii) यदि n विषम संख्या है तब माध्यक

(a) $\frac{n}{2}$ वे प्रेक्षण का मान (b) $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ वे प्रेक्षण का मान

(c) $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ वे प्रेक्षण का मान (d) कोई नहीं

(iv) सभी प्रेक्षणों का योग/प्रेक्षणों की कुल संख्या =

(a) माध्यक (b) बहुलक (c) माध्य (d) कोई नहीं

(v) माध्यक प्रेक्षणों का वह मान होता जो इसे ठीक ठीक .....भागों में विभक्त कर देता है।

(a) 1 (b) 10 (c) 3 (d) 2

(vi) अवर्गीकृत ऑकड़ों को आरोही या अवरोही क्रम में व्यवस्थित करके किस केन्द्रीय प्रवृत्ति की माप की जाती है :

(a) माध्यक (b) माध्य (c) बहुलक (d) शेषफल

(vii) अवर्गीकृत ऑकड़ो में जब प्रेक्षणों की संख्या कम होती है तब माध्यक होता है।

(a) $\frac{n}{2}$ वे पद का मान (b) $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ वे पद का मान

(c) $\frac{n}{2}$ वे और $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ वे प्रेक्षणों का माध्य (d) N

(viii) जब प्रेक्षणों की संख्या विषम होती है तब माध्यक होता है।

(a) $\left(\frac{n}{2}\right)$ वे पद का मान (b) $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ वे पद का मान

(c) $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ वे पद का मान (d) N

(ix) अवर्गीकृत आकड़ों में सबसे अधिक आने वाले प्रेक्षण का मान होता है।

(a) बहुलक (b) माध्य (c) माध्यिका (d) योग

(x) एक निश्चित उद्देश्य से एकत्रित किये गये तथ्यो या अंकों को कहा जाता है।

(a) माध्यक (b) बहुलक (c) आकड़े (d) बहुभुज

(xi) अध्ययन का वह क्षेत्र जिसमें आकड़ों के प्रति प्रस्तुतीकरण विश्लेषण तथा निर्वचन पर विचार किया जाता है।

(a) गति विज्ञान (b) विज्ञान (c) साख्यिकी (d) प्रायिकता

प्रश्न 2.5 व्यक्तियों से यह पूछा गया है कि अपने समुदाय के सामाजिक कार्य करने में वे एक सप्ताह में कितना समय देते है ? उनका कहना था 10,7,13,20 ओर 15 घण्टे । एक सप्ताह में उनके द्वारा लगाये गये कार्य में, लगाए समयों का माध्य ज्ञात कीजिये।

प्रश्न 3.एक कक्षा के 9 विद्यार्थियों की (सेटीमीटर में) लम्बाईयॉ ये है :
155,160,145,149,150,147,152,144,148 इन आकड़ों का माध्यक ज्ञात कीजिये।

प्रश्न 4.आकड़ों 14,25,14,28,18,17,18,14,23,22,14,18 का बहुलक ज्ञात करिये।

प्रश्न 5.कक्षा नवमी के 15 विद्यार्थियों के रक्त समूह ये है।

A, B, O, O, AB, O, A, O, B, A, O, B, A, O, O

इन आकड़ों को एक बारम्बारता बटन सारणी के रूप में प्रस्तुत कीजिये। विद्यार्थियों में कौन सा रक्त समूह विरलतम हैं ?

प्रश्न 6. गणित की परीक्षा में 15 विद्यार्थियों ने (100 में से) निम्नलिखित अंक प्राप्त किये है।
41, 39, 48, 52, 46 ,62, 54, 40, 96, 52, 98, 40, 42, 52, 60
इन आकड़ों का माध्य, माध्यक और बहुलक ज्ञात कीजिये।

प्रश्न 7 निम्नलिखित प्रेक्षणों को आरोही क्रम में व्यवस्थित किया गया है। यदि आकड़ों का माध्यक 63 हो , तो x का मान ज्ञात करो।

29, 32, 48, 50, $x, x+2$, 72, 78, 84, 95

प्रश्न 5. दिये हुए ऑकड़ों 1,5,11,2,9,6,4,7 का माध्यक ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 7.एक टीम ने फुटबाल के 10 मेचों मे ंनिम्नलिखित गोल किये. 2 3 4 5 0 1 3 3 4 3

इन गोलों के माध्य, माध्यक और बहुलक ज्ञात कीजिये।

(5)

प्रश्न 8.निम्न सारणी से एक फैक्टरी में काम कर रहे 60 कर्मचारियों का माध्य वेतन ज्ञात कीजिये।

वेतन	3000	4000	5000	6000	7000	8000	9000	10000
कर्मचारियों की संख्या	16	12	10	8	6	4	3	1

प्रश्न 9.निम्नलिखित बारम्बारता सारणी में उसके नीचे दिये हुए प्रश्नों के उत्तर दीजिये।

वर्ग अन्तराल	100-125	125-150	150-175	175-200	200-225	225-250	250-275	275-300	300-325	योग
बारम्बारता श्रमिकों की संख्या	45	25	55	125	140	55	35	50	20	550

(i) वर्ग अन्तरालों की माप क्या है ?

(ii) किस वर्ग की सबसे अधिक बारम्बरता है ?

(iii) किस वर्ग की सबसे कम बारम्बरता है ?

(iv) किन दो वर्गो की बारम्बरता एक ही है ?

प्रश्न 10. किसी फैक्ट्री के 30 श्रमिकों की साप्ताहिक मजदूरी रूपयों में निम्नलिखित हे :

830,835,890,810,835,836,869,845,898,890,820,860,832,833,855,845,804,808,812,840, 885,835,835,836,878,840,868,890,806,840

1. मिलान चिन्हों का प्रयोग करते हुये अन्तरालों 800–810, 810–820 इत्यादि वाली बारम्बरता सारणी बनाइये।

प्रश्न 11. एक क्रिकेट खिलाड़ी ने 8 पारियों में निम्नलिखित रन बनाएँ 58,76,40,35,46,50,0,100 उसका माध्य स्कोर ज्ञात करिये।

प्रश्न 12. गणित की एक परीक्षा में 15 विद्यार्थियों द्वारा (25 में से) प्राप्त अंक है : 19,25,23,20,9,20,15,10,5,16,25,20,24,12,20 इन ऑकड़ों के बहुलक और माध्य ज्ञात कीजिये।

अध्याय –15 प्रायिकता

शिक्षकों के लिए निर्देश –

ब्लूप्रिंट – **1 अंक के प्रश्नों की संख्या = 2 = 1 x 2 = 2**

2 अंक के प्रश्नों की संख्या = 1 = 2 x 2 = 4

कुल अंक = 6

शिक्षकों के लिए निर्देश –

1 कक्षा IX की पाठ्यपुस्तक के पृष्ठ क्रमांक 323 से 329 तक पर दी गई क्रिया–कलाप I से V तक को कक्षा में कराकर प्रायिकता की अवधारणा को स्पष्ट किया जाए।

2 संभवतः संदेह तथा संयोग आदि शब्दों के प्रयोग से बनने वाले कथनों द्वारा प्रायिकता को दैनिक जीवन से जोडने का प्रयास करें।

3 मौसम का पूर्वानुमान एवं अन्य अनिश्चितता को पता लगाने में प्रायिकता का क्या महत्व है? समझाया जाए।

4 प्रायकिता का सूत्र एवं उसके अधिकतम एवं न्यूनतम मान को समझाया जाए।

5 विद्यार्थी कुल अभिप्रयोगों एवं अनुकूल घटनाओं की संख्या से भलीभांति परिचित हो सकें।

विद्यार्थी प्रायिकता $P(E) = \frac{\text{अ भप्रयोगों की संख्या जिनमें घटना घटी है}}{\text{अ भप्रयोगों की कुल संख्या}}$ से परिचित हो सकें।

विषय वस्तु –

आवश्यक सामग्री :– सिक्के, ताश, पॉसा, थैला, गेंद, अच्छे पेन, खराब पेन, Pointer circle.

गतिविधि :–

दिये गये 50 सिक्के में 1 रू. के 15, 2 रू. के 5 तथा 5 रू. के 10, 10 रू. के 20 सिक्के लेकर छात्रों से पूछेंगे कुल सिक्के कितने हैं ? छात्रों से गिनती करायें।

इसी तरह 1, 2, 5, 10 के सिक्कों की गिनती करायेंगे एवं सारणी बनवायें जो निम्नानुसार होना चाहिए–

क्र.	सिक्का	सिक्कों की संख्या
1	1 रू. का सिक्का	15
2	2 रू. का सिक्का	05
3	5 रू. का सिक्का	10
4	10 रू. का सिक्का	20
	कुल सिक्के	**50**

(1) कोई एक सिक्का निकाले जाने पर सिक्कों में 1 रू. के आने की संभावना

संभावित उत्तर $\frac{15}{50}$, $\frac{50}{15}$ सही उत्तर $\frac{15}{50}$

इसी तरह – 2 रू. के सिक्कों के आने की संभावना = $\frac{5}{50}$

5 रू. के सिक्कों के आने की संभावना = $\frac{10}{50}$

10 रू. के सिक्कों के आने की संभावना = $\frac{20}{50}$

विद्यार्थी कहाँ गलती करते हैं।

1. अंश और हर में लिखी जाने वाली संख्याओं का परस्पर परिवर्तन
2. घटनाओं की संख्या को गलत लिख देना
3. कुल घटना लिखते समय योग न करना
4. कभी–कभी प्रश्न में लिखी अन्य संख्याओं को भी घटना या कुल अभिप्रयोग समझ लेना।

वस्तुनिष्ठ प्रश्न –

1 किसी निश्चित घटना की प्रायिकता क्या होती है। (उत्तर – एक)

2 किसी घटना के घटने की प्रायिकता एवं न होने (घटने) की प्रायिकता का योग कितना होता है। (उत्तर – एक)

3 असम्भव घटना की प्रायिकता क्या होती है। (उत्तर – शून्य)

4 एक सप्ताह में सोमवार होने की प्रायिकता $\frac{1}{7}$ होती है।

5 किसी सिक्के को उछालने पर ऊपरी फलक पर H हैंड (चित) आने की प्रायिकता $\frac{1}{2}$ होती है।

6 किसी अनभिनत पांसे को उछालने पर उसके ऊपरी सिरे पर सम अंक आने की प्रायिकता क्या होगी। (उत्तर $\frac{1}{2}$)

7 किसी अनभिनत पांसे को उछालने पर उसके ऊपरी फलक पर 7 का अंक आने की प्रायिकता क्या होगी। (उत्तर – शून्य)

8 किसी पांसे को उछालने पर ऊपरी सतह पर चार से अधिक (बडा) अंक आने की प्रायिकता होगी। (उत्तर – $\frac{1}{3}$)

प्रश्न 1 दो सिक्कों को एक साथ 500 बार उछालने पर हमें यह प्राप्त होता है–

दो चित :	105 बार
एक चित :	275 बार
कोई भी चित नहीं :	120 बार

इनमें से प्रत्येक घटना के घटने की प्रायिकता ज्ञात करो –

दिया है :– कुल अभिप्रयोगों की संख्या = 500

हल :– माना दो चित आने की घटना = (E_1) की संख्या 105

एक चित आने की घटना = (E_2) की संख्या 275

तथा कोई भी चित न आने की घटना = (E_3) की संख्या 120

तब $P(E_1) = \frac{\text{दो चितों के आने की घटना की संख्या}}{\text{कुल अभिप्रयोगों की संख्या}}$

तब $P(E_1) = \frac{105}{500} = 0.21$

$P(E_2) = \frac{\text{एक चित के आने की घटना की संख्या}}{\text{कुल अभिप्रयोगों की संख्या}}$

$P(E_2) = \frac{275}{500} = 0.55$

(1 अंक)

$P(E_2) = \frac{\text{कोई भी चित न आने की घटना की संख्या}}{\text{कुल अभिप्रयोगों की संख्या}}$

$P(E_2) = \frac{120}{500} = 0.24$

यहां यह भी ध्यान देने योग्य है कि सभी प्रायिकताओं का योग

$$P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) = 0.21 + 0.55 + 0.24 = 1$$

प्र. 2 एक मौसम केन्द्र के रिकार्ड को देखने से पता चलता है कि पिछले 250 क्रमागत दिनो में दिये गये मौसम पूर्वानुमानों में से 175 बार उसके पूर्वानुमान सही रहे है।

1) एक दिए हुए दिन पर पूर्वानुमान के सही होने की प्रायिकता क्या होगी ?
2) दिए हुए हुए दिन पर पूर्वानुमान के सही न होने की प्रायिकता क्या होगी ?

हल :– दिनो की कुल संख्या जिनके रिकार्ड उपलब्ध है = 250

1) P (दिए हुए दिन पर पूर्वानुमान सही था)

(2 अंक)

$= \frac{\text{उन दिनो की संख्या जिस दिन पूर्वानुमान सही था}}{\text{उन दिनो की कुल संख्या जिनके रिकार्ड उपलब्ध है।}}$

$= \frac{175}{250} = 0.7$

2) उन दिनो की संख्या जिस दिन का पूर्वानुमान सही नहीं था

250–175 =75

अतः P (दिए हुए दिन पर पूर्वानुमान सही नहीं था)

$= \frac{75}{250} = 0.3$

प्रश्न 3. 2 बच्चों वाले 1500 परिवारों का यदृच्छया चयन किया गया है और निम्नलिखित आंकडे लिख लिए गये हैं।

परिवार में लडकियों की संख्या	2	1	0
परिवारों की संख्या	475	814	211

यदृच्छया चुने गये उस परिवार की प्रायिकता ज्ञात कीजिए, जिसमें (i) दो लडकियाँ हों (ii) एक लडकी हो (iii) कोई लडकी न हो, साथ ही यह भी जांच कीजिए कि प्रायिकताओं का योगफल 1 है या नहीं?

हल :– माना घटना परिवार जिसमें दो लड़कियाँ हों, E_1 है।

(i) तब प्रायिकता $P(E_1) = \frac{\text{परिवार की संख्या जिसमें दो लडकियां हैं}}{\text{कुल परिवारों की संख्या}}$

$= \frac{475}{1500} = .316$

(ii) माना घटना जिसमें परिवार में एक लडकी हो, E_2 है।

तब प्रायिकता $P(E_2) = \frac{\text{परिवार की संख्या जिसमें एक लडकी हो}}{\text{कुल परिवारों की संख्या}}$

$= \frac{814}{1500} = .542$

(iii) माना घटना जिसमें परिवार में एक भी लड़की न हो, E_3 है।

तब प्रायिकता $P(E_3) = \frac{\text{परिवार की संख्या जिसमें एक भी लडकी न हो}}{\text{कुल परिवारों की संख्या}}$

$= \frac{211}{1500} = .1406$

जांच :– प्रायिकताओं का योग –

(1 अंक)

$P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) =$

$= \frac{475}{1500} + \frac{814}{1500} + \frac{211}{1500}$

$= \frac{1500}{1500}$

$= 1$

प्रश्न 4. 200 विद्याथिर्यों का सर्वेक्षण कर प्राप्त आंकडे निम्नानुसार है कि सांख्यिकी विषय के बारे में उनका मत क्या है?

मत	विद्यार्थियों की संख्या
पसंद करते हैं	135
पसंद नहीं करते हैं	65

प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि यदृच्छया चुना गया विद्यार्थी –
(i) सांख्यिकी पसंद करता है (ii) सांख्यिकी पसंद नहीं करता है।
हल – कुल विद्यार्थियों की संख्या = 200
अर्थात कुल अभिप्रयोगों की संख्या = 200
(I) विद्यार्थियों की संख्या जो सांख्यिकी पसंद करते हैं = 135
माना घटना जबकि चुना गया विद्यार्थी सांख्यिकी पसंद करता है, E_1 है।

$$\text{तब } P(E_1) = \frac{\text{विद्यार्थियों की संख्या जो सांख्यिकी पसंद करते हैं}}{\text{कुल विद्यार्थियों की संख्या}}$$

$$= \frac{135}{200} = .675$$

(ii) विद्यार्थियों की संख्या जो सांख्यिकी पसंद नहीं करते है = 65
माना घटना जबकि चुना गया विद्यार्थी सांख्यिकी पसंद नहीं करता है, E_2 है।

$$\text{तब प्रायिकता } P(E_2) = \frac{\text{विद्यार्थियों की संख्या जो सांख्यिकी पसंद करते हैं}}{\text{कुल विद्यार्थियों की संख्या}}$$

$$= \frac{65}{200} = .325$$

प्रश्न 5 एक क्रिकेट मैच में, एक महिला बल्लेबाज खेली गई 30 गेंदों में 6 बार चौका मारती है चौका न मारे जाने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
हल :– महिला द्वारा कुल खेली गई गेंदों की संख्या = 30
चौका मारने वाली गेंदों की संख्या = 6
तब उन गेंदों की संख्या जिसमें चौका नहीं मारा गया
30–6 = 24 गेंद
माना चौका न मारे जाने की घटना E है।

$$\text{तब प्रायिकता } P(E) = \frac{\text{चौका न मारे जाने वाली गेंद की संख्या}}{\text{कुल गेंदों की संख्या}}$$

$$P(E) = \frac{24}{30} = 0.8$$

स्मरणीय बिन्दु

1. $\text{प्रायिकता } P(E) = \frac{\text{अभिप्रयोगों की संख्या जिसमें घटना घटी है।}}{\text{अभिप्रयोगों की कुल संख्या}}$
2. किसी घटना के घटने की प्रायिकता 0 से 1 के बीच होती है जिसमें 0 तथा 1 भी सम्मिलित है।
3. अभिप्रयोग एक क्रिया है जिससे एक या अधिक परिणाम प्राप्त होते है।
4. एक प्रयोग में घटना, प्रयोग के कुछ परिणामों का संग्रह होती है।

5. पांसा एक संतुलित घन है जिसमें 6 फलक होते है जिन पर 1 से 6 तक की संख्या अंकित होती है। इसमें एक फलक पर केवल एक संख्या अंकित होती है। किसी घटना के घटने की प्रायिकता 0 से 1 के बीच होती है जिसमें 0 तथा 1 भी सम्मिलित है।
6. अभिप्रयोग एक क्रिया है जिससे एक या अधिक परिणाम प्राप्त होते है।

एक प्रयोग में घटना, प्रयोग के कुछ परिणामों का संग्रह होती है।

अभ्यास प्रश्न

वस्तुनिष्ठ प्रश्न :–

प्रश्न 1(a) किसी घटना के घटित होने की प्रायिकता का संख्यात्मक मान निम्न में से किन्हीं दो संख्याओं के बीच होता है।

(a) – 1 और 0 के बीच (b) 0 और 1 के बीच जिसमें 0 और 1 सम्मिलित होते हैं।

(c) – 1 और 1 के बीच (b) कोई नहीं

प्रश्न 1(b) किसी घटना के घटने की प्रायकिता निम्न में से क्या नहीं हो सकती है।

(अ) 0 (ब) $\frac{1}{2}$ (स) 2 (द) 1

प्रश्न 2 एक विद्यार्थी द्वारा मासिक यूनिट परीक्षा में प्राप्त किये अंको का प्रतिशत नीचे दिया गया है?

यूनिट परीक्षा	I	II	III	IV
प्राप्त अंकों का प्रतिशत	69	71	73	68

इन आंकडों के आधार पर इस बात की प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि एक यूनिट परीक्षा में वह विद्यार्थी 70% से अधिक अंक प्राप्त करता है।

प्रश्न 3) 2 बच्चों वाले 1500 परिवारों का यदृच्छया चयन किया गया है और निम्नलिखित आंकडे लिख लिये गये है।

परिवार में लडकियों की संख्या –	2	1	0
परिवारों की संख्या –	475	814	211

यदृच्छया चुने गये उस परिवार की प्रायिकता ज्ञात कीजिये जिसमें

(1) दो लडकियां हो (2) एक लडकी हो (3) कोई लडकी न हो

प्रश्न 4 एक मौसम केन्द्र के रिकार्ड को देखने से पता चलता है कि पिछले 250 क्रमागत दिनों में किये गये मौसम पूर्वानुमानों में से 175 बार उनके पूर्वानुमान सही रहे हैं।

(1) एक दिये हुए दिन पर पूर्वानुमान के सही होने की प्रायिकता क्या होगी ?

(2) दिए हुए दिन पर पूर्वानुमान के सही नही होने की प्रायिकता क्या होगी ?

प्रश्न 5 एक कंपनी ने 2400 परिवार चुनकर एक घर की आय स्तर और वाहनों के बीच संबंध स्थापित करने के लिए उनका सर्वेक्षण किया एकत्रित किये गये आंकडे नीचे सारणी में दिये गये है।

मासिक आय (रू. में)	प्रति परिवार वाहनों की संख्या			
	0	1	2	2 से अधिक
7,000 से कम	10	160	25	0
7,000 से 10,000	0	305	27	2
10,000 से 13,000	1	535	29	1
13,000 से 16,000	2	469	59	25
16,000 या इससे अधिक	1	579	82	88

माना कि एक परिवार चुना गया है। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि चुने गये परिवार –

1. की आय रू. 10,000–13,000 प्रतिमाह है और उसके पास ठीक–ठीक 2 वाहन हैं।
2. की आय प्रतिमाह रू. 16,000 या अधिक है और उसके पास ठीक–ठीक 1 वाहन है।
3. की आय प्रतिमाह रू. 7,000 प्रतिमाह से कम है औस उसके पास कोई वाहन नहीं है।
4. जिसके पास 1 वाहन से अधिक नहीं है।

प्रश्न 6 एक टेलीफोन निर्देशिका के पृष्ठ पर 200 टेलीफोन नम्बर है । उनके इकाई वाले अंक का बारम्बारता अटन निम्न सारणी में दिया गया है।

अंक	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
बारम्बारता	22	26	22	22	20	10	14	28	16	20

यदि एक अंक को यदृच्छया चुना जाता है, तब ज्ञात कीजिए।

1. अंक 6 के होने की प्रायिकता
2. अंक 1 के होने की प्रायिकता
3. प्रश्न 7 तीन सिक्कों को एक साथ 200 बार उछाला गया है तथा इनमें विभिन्न परिणामों की बारम्बारतायें हैं –

परिणाम	3 चित	2 चित	1 चित	कोई भी चित नहीं
बारम्बारता	23	72	77	28

तब 2 चित तथा कोई भी चित नही आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

अध्याय –11 रचनाएँ

शिक्षकों के लिए निर्देश :

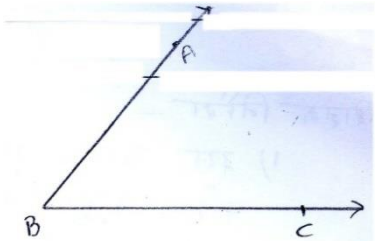
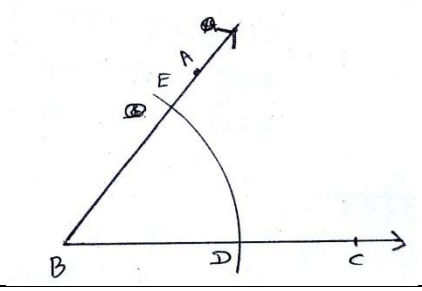
1. इस अध्याय पर 4 अंक आवंटित है । 4 अंक का 1 प्रश्न परीक्षा में पूछा जायेगा।
2. बच्चे ज्यामेट्री बाक्स के उपकरण से परिचित है, बच्चो को रूलर की सहायता से रेखाखण्ड , किरण , रेखा खीचना बनाए एवं चॉदे की सहायता से विभिन्न कोणों को बनाने का अभ्यास कराए।

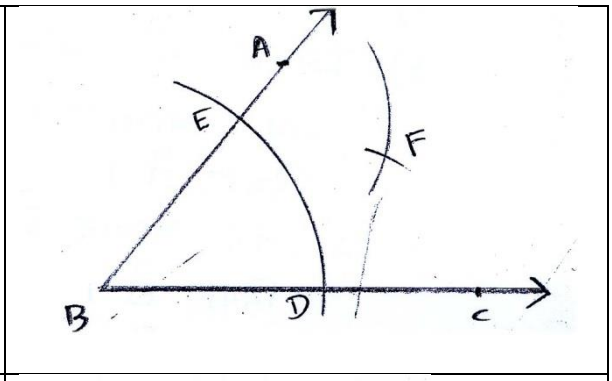
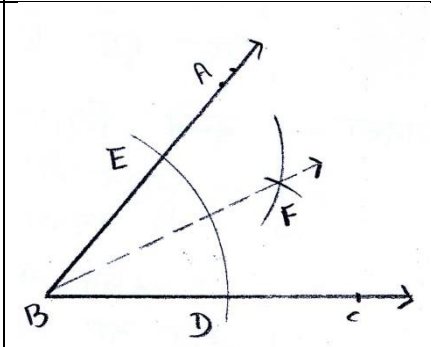
   बच्चे त्रिभुज की रचना से पूर्व से परिचित है। जैसे त्रिभुज की रचना करना जब तीनों भुजाएँ दी हो, त्रिभुज की रचना करना जब एक भुजा और दो कोण दिए हो, त्रिभुज की रचना जब दो भुजा और एक कोण दिया हो, पूर्व ज्ञान का उपयोग कर बच्चे विशेष त्रिभुजों की रचना करना सीखेगे।

<u>प्रस्तुतीकरण</u>

आवश्यक सामग्रीः ज्यामिति बाक्स, जियो बोर्ड, धागा , रबड।

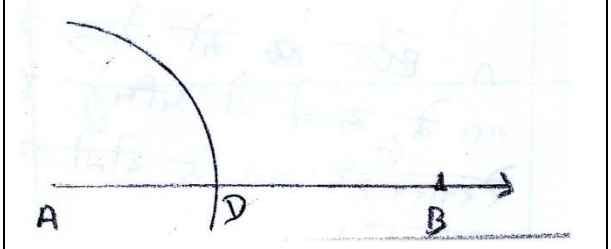
एक दिए हुए कोण के समद्विभाजक की रचना करना ।

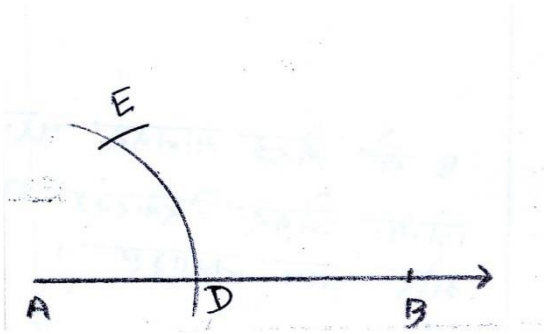
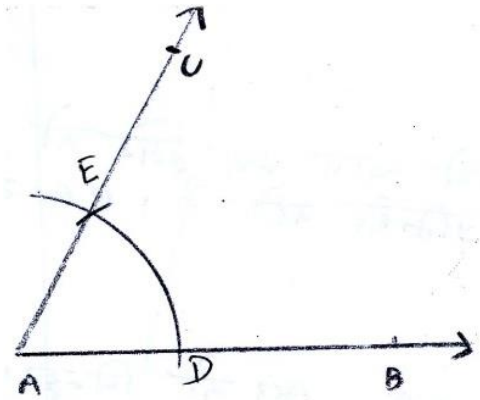
स.क्र.	रचना के पद	रचना
1.	$\angle ABC$ की रचना कीजिए।	
2.	B को केन्द्र मानकर तथा कोई त्रिज्या लेकर एक चाप लगाइए जो किरण BA और BC को क्रमशः E और D पर प्रतिच्छेद करता है।	

3.	पुनः D और E को केन्द्र मानकर तथा DE के आधे से बड़ी त्रिज्या लेकर चाप लगाइए जो एक दूसरे को F पर प्रतिच्छेद करते है।	
4.	किरण BF खींचिए। निष्कर्ष : $\overrightarrow{BF}$ कोण ABC का अभीष्ट समद्विभाजक है। (शिक्षक उपरोक्त तरीके से रचना अभ्यास कराना बच्चो को सिखाएँ) प्रश्न $-\angle ABC = 80^0$ बनाकर समद्विभाजक की रचना कीजिए ।	

भाग –2

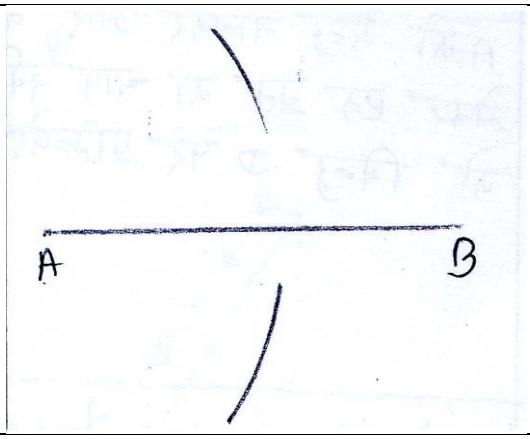
60^0 के कोण की रचना करना।

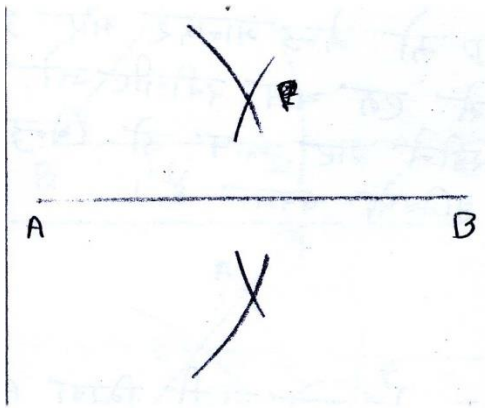
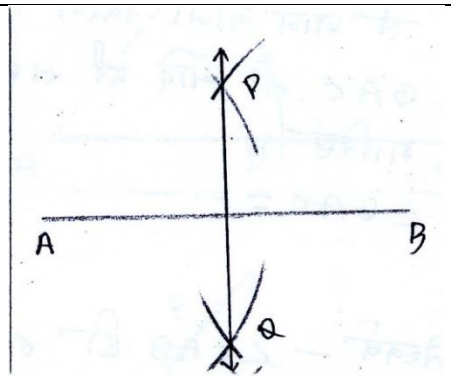
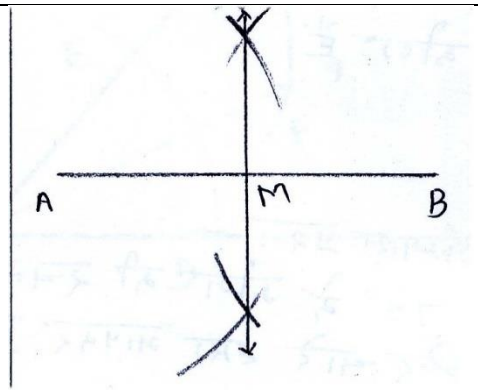
स.क्र.	रचना के पद	रचना
1.	किरण $\overrightarrow{AB}$ खींचिए।	
2.	A को केन्द्र मानकर और कोई त्रिज्या लेकर एक वृत्त का चाप खींचिए जो AB को बिन्दु D पर प्रतिच्छेद करता है।	

3.	D को केन्द्र मानकर और उसी त्रिज्या से एक चाप खींचिए जो चरण 2 में खीचे गए चाप को बिन्दु E पर प्रतिच्छेद करता है।	
4.	E से जाने वाली किरण AC खींचिए। $\angle BAC$ को चॉदे की सहायता से मापिए। $\angle BAC =$..... निष्कर्ष : $\angle CAB$ ही 60^0 का अभीष्ट कोण है । अभ्यास प्रश्न– 75 ^{0} के कोण की रचना कीजिए और चादे द्वारा मापकर पुष्टि कीजिए।	

भाग –3

रेखाखण्ड के लम्ब समद्विभाजक की रचना करना।

स.क्र.	रचना के पद	रचना
1.	रेखाखण्ड AB खीचिए।	
2.	A को केन्द्र मानकर AB के आधे से अधिक त्रिज्या लेकर रेखाखण्ड AB के दोनों ओर चाप लगाइए।	

3.	B को केन्द्र मानकर चरण 2 की त्रिज्या लेकर रेखाखण्ड AB के दोनों और चाप लगाइए।	
4.	ये चाप एक दूसरे को P और Q पर प्रतिच्छेद करते है। PQ को मिलाइए।	
5.	PQ, AB को बिन्दु M पर प्रतिच्छेद करती है। निष्कर्ष : रेखा PMQ रेखखण्ड AB का अभीष्ट लंब समद्विभाजक है।	

अभ्यास प्रश्न

प्रश्नः1. रूलर एवं परकार की सहायता से $60^0, 75^0, 90^0, 45^0,$ एवं 30^0 के कोण की रचना करना।

प्रश्नः2. एक समबाहु त्रिभुज की रचना कीजिए जब इसकी भुजा दी हो।

प्रश्नः3. निम्न मापों के कोणों की रचना कीजिए।

$(a)\ 30^0 \qquad (b)\ 45^0 \qquad (c)\ 60^0 \qquad (d)\ 120^0$

.

प्रश्न4. $6cm$ भुजा का एक समबाहु त्रिभुज बनाइए।

प्रश्न 5.निम्न मापों के कोणों की रचना कीजिए।

$(i)\ 22\frac{1}{2}^0 \qquad (ii)\ 15^0$

प्रश्न 6.निम्न कोण की रचना कीजिए और चाँदे द्वारा मापकर पुष्टि कीजिए।

$(i)\ 75^0 \qquad (ii)\ 105^0 \qquad (iii)\ 135^0$

अध्याय – 12 हीरोन का सूत्र

शिक्षकों के लिए निर्देश :

1. अध्याय पर आवंटित अंक 5 है ।
2. ब्लूप्रिंट – 1 अंक के प्रश्नों की संख्या = 1 = 1 X 1 = 1

   4 अंक के प्रश्नों की संख्या = 1 = 4 X 1 = 4

   कुल अंक = 6

3. विद्यार्थी त्रिभुज के क्षेत्रफल ज्ञात करने से परिचित है। क्षेत्रफल सम्बन्धी प्रश्नों का अभ्यास कराया जाये।

4. विभिन्न त्रिभुजाकार आकृति जैसे यातायात संकेत बोर्ड , त्रिभुजाकार पार्क आदि से परिचित कराए।

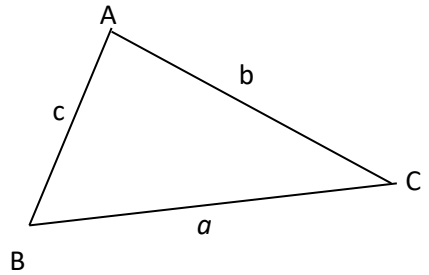
5. त्रिभुज की परिमाप व भुजाओं से बच्चो को परिचित कराए

प्रस्तुतीकरण :

यदि किसी त्रिभुज का आधार व ऊचॉई मालूम हो तो त्रिभुज का क्षेत्रफल सूत्र

$\frac{1}{2} \times$ आधार $\times$ ऊँचाई की सहायता से ज्ञात किया जा सकता है , किन्तु जब त्रिभुज की तीनों भुजाए मालूम हो तो त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए हीरोन का सूत्र का उपयोग करेंगे।

हीरोन का सूत्र :



2S = a+b+c

त्रिभुज का क्षेत्रफल : $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

जहॉ s,त्रिभुज की अर्ध परिमाप एवं a, b व c त्रिभुज की भुजाए है।

प्रश्न. ΔABC की भुजाएँ क्रमशः 40 मी. 24 मी. एवं 32 मी. हैं। त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

निर्देशः शिक्षक बच्चों को बार बार प्रश्न को पढने के लिए कहे। एवं बच्चो से पूछे कि प्रश्न में क्या दिया है । क्या ज्ञात करना है , किस सूत्र की आवश्यकता होगी।

हलः ΔABC में

$a = 40\ cm$

$b = 24\ cm$

$c = 32\ cm$

ज्ञात करना है –

त्रिभुज का क्षेत्रफल =?

आवश्यक सूत्र

Δ का क्षेत्र $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

(शिक्षक बच्चो को बताएँ कि सूत्र में s , Δ की अर्द्धपरिमाप है। अर्द्धपरिमाप ज्ञात करने में बच्चो की सहायता करे।)

$s = \frac{a+b+c}{2}$ या $2s = a + b + c$

$$s = \frac{40 + 24 + 32}{2}$$

$$s = \frac{96}{2}$$

$s = 48cm$

Δ का क्षेत्रफल $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$$= \sqrt{48(48-40)(48-24)(48-32)}$$

$$= \sqrt{48 \times 8 \times 24 \times 16}$$
$$= \sqrt{16 \times 3 \times 8 \times 8 \times 3 \times 16}$$
$$= 16 \times 3 \times 8$$
$$= 48 \times 8$$
$$= 384\ cm^2$$

प्रश्न एक त्रिभुज की भुजाओं का अनुपात 12:17:25 है और उसका परिमाप 540 सेमी. है। इस त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हलः (शिक्षक बच्चो को परिमाप व अनुपात की सहायता से त्रिभुज की भुजाए ज्ञात करने में सहायता करे।)

दिया है – भुजाओं का अनुपात $= 12:17:25$

$a = 12x, b = 17x, c = 25x$

परिमाप $= 540cm$

$S =$ अर्ध परिमाप $= \frac{540}{2} = 270cm$

$$s = \frac{a+b+c}{2}$$

$$270 = \frac{54x}{2}$$

$$270 = 27x$$

$$\boxed{x = 10}$$

$$a = 12x = 12 \times 10 = 120cm$$

$$b = 17x = 17 \times 10 = 170cm$$

$$c = 25x = 25 \times 10 = 250cm$$

Δ का क्षेत्र$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$$= \sqrt{270 \times (270-120)(270-170)(270-250)}$$

$= \sqrt{270 \times 150 \times 100 \times 20}$

$= \sqrt{3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 2 \times 10^5} \times 3$

$= 3 \times 3\sqrt{5 \times 2 \times 10^5}$

$= 3 \times 3\sqrt{10 \times 10^5}$

$= 9 \times \sqrt{10^6} = 9 \times 10^3 = 9000cm^2$

समान्यतः बच्चे वर्गमूल निकालने में कठिनाई महसूस करते है अतः आसान तरीके से वर्गमूल निकालने में सहायता करे। जैसे – $\sqrt{27 \times 15 \times 2 \times 5} = \sqrt{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 2 \times 5}$

$= \sqrt{3} \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 5 \times 2$

$= 3 \times 3 \times 5 \times \sqrt{2} = 45\sqrt{2}$

स्मरणीय बिन्दुः

1. की परिमाप व अर्धपरिमाप ज्ञात करना याद रखना है। अर्धपरिमाप $= \frac{a+b+c}{2}$, $S = \frac{a+b+c}{2}, 2s = a + b + c$
2. हीरोन का सूत्र Δ का क्षेत्र $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

अभ्यास प्रश्न :–

प्रश्न क्रमांक–1 **(वस्तुनिष्ठ प्रश्न)**

(1) किसी त्रिभुज जिसकी भुजाएँ a, b और c हों तो इसकी अर्द्धपरिमाप s होती है।

(अ) a + b + c (ब) $\frac{a+b+c}{2}$

(स) 2(a+b+c) (द) $\frac{a+b+c}{3}$

प्रश्न–2 सत्य/असत्य लिखिए।

1. त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$(आधार x ऊँचाई) होता है।
2. विषम बाहु त्रिभुज के क्षेत्रफल का सूत्र $= s(s-a)(s-b)(s-c)$ होता है जहां a, b, c त्रिभुज की भुजाएं तथा s अर्द्धपरिमाप है।

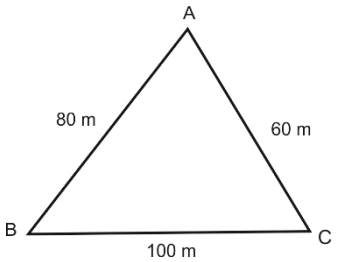
प्रश्न 1. एक यातायात संकेत बोर्ड के आगे स्कूल है, लिखा है और यह भुजा a वाले एक समबाहु त्रिभुज के आकार का है। हीरोन के सूत्र का प्रयोग करके इस बोर्ड का क्षेत्र ज्ञात कीजिए यदि संकेत बोर्ड का परिमाप $180cm$ है। तो इसका क्षेत्रफल क्या होगा।

प्रश्न 2. एक त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी दो भुजाए $8\ cm$ और $11\ cm$ है जिसका परिमाप $32cm$ है।

प्रश्न 3. एक त्रिभुजाकार पार्क ABC की भुजाए $120m, 80m$ और $50m$ है पार्क का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 4. एक त्रिभुजाकार भुखंड की भुजाओं का अनुपात 3:5:7 है और उसका परिमाप $300m$ है इस भुखंड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 5.



उपरोक्त आकृति का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

अध्याय :– 13 पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन

शिक्षको के लिए निर्देश :–

इस अध्याय हेतु कुल 5 अंक निर्धारित है

अंकवार प्रश्नों की संख्या				कुल अधिभार
1 अंक	2 अंक	3 अंक	4 अंक	
2	1	–	4	1 + 1 + 2 + 4 = 8

छात्र अभी तक उन्हीं आकृतियों का अध्ययन करते आ रहें हैं जिन्हें हम अपनी अभ्यास पुस्तिका अथवा श्याम पट पर खींच सकते है जो कि समतल आकृतियां कहलाती है। जैसे आयत,वृत्त,वर्ग इत्यादि इनके परिणाम क्षेत्रफलों के विषय में छात्र पिछली कक्षाओं में पढ़ चुकें हैं। इस अध्याय में कुछ ठोस आकृतियां (जिन्हें प्रायः ठोस कहतें है) जैसे घनाभ,घन,शंकु,गोला और बेलनों के पृष्ठीय क्षेत्रफलों एवं आयतनों के बारे में अध्ययन करेंगें। शिक्षकों से अपेक्षित है कि सभी ठोस आकृतियों के प्रतिरूप(मॉडल आकृतियां) छात्रों को दिखांए जिससे छात्र आकृतियों के पृष्ठीय क्षेत्रफल, सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल व आयतन की अवधारणा को समझ सकें और संबंधित प्रश्न हल करने में कुशलता प्राप्त कर पांए। विभिन्न सूत्रों के चार्ट बगैरह छात्रों से क्रियाकलाप के माध्यम से तैयार कराकर कक्षा की दीवारों में लगवांए और हो सके तो प्रतिदिन इन सूत्रों का मौखिक दोहराव करांए।

घन – घनाभ पृष्ठीय क्षेत्रफल :– माना एक घनाभ जिसकी लम्बाई, चौड़ाई और उचांई l,b और h है। एक घनाभ की बाहरी छः पृष्ठ छः आयताकार क्षेत्रों जो घनाभ की फलक कहलाते है, से मिलकर बनी है। जिनमें प्रत्येक का क्षेत्रफल उसकी लंबाई और चौड़ाई के गुणनफल से प्राप्त किया जा सकता हैं। और फिर सभी छः क्षेत्रफलों को जोड़ लिया जाता है।

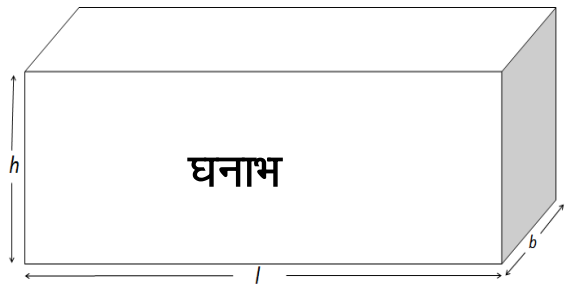
सभी छः आयतों का क्षेत्रफल = आयत 1 क्षेत्रफल ($=lxh$) + आयत 2 का क्षेत्र (lxb)

+ आयत 3 का क्षेत्र (lxh) + आयत 4 का क्षेत्र (lxb)

+ आयत 5 का क्षे. (bxh) + आयत 6 का क्षेत्र (bxh)

$= 2(lxb) + 2\ (lxh) + 2\ (bxh)$

अतः घनाभ का पृष्ठीय क्षेत्रफल = $2(lb+bh+lh)$



यदि किसी घनाभ की लंबाई, चौड़ाई और ऊँचाई बराबर हो अर्थात् $l = b = h = a$ माना हो तो घन का पृष्ठीय क्षेत्रफल = $6a^2$

उदाहरण प्रश्न – मैरी अपने क्रिसमस वृक्ष को सजाना चाहती है। वह इस वृक्ष को लकड़ी के घनाभकार बॉक्स में रखना चाहती है जिसे सान्ता क्लाज के चित्र के साथ एक रंगीन कागज से ढका जाना है उसके लिए यह जानना आवश्यक है कि उसे कितना कागज खरीदना चाहिए। यदि बॉक्स की लम्बाई, चौड़ाई और ऊचांई क्रमशः 80सेमी,40सेमी और 20सेमी है तो उसे 40सेमी भुजा वाली कागज की कितनी वर्गाकार शीटों की आवश्यकता होगी।

हल :– चूंकि मैरी बॉक्स के ऊपरी पृष्ठ को कागज से ढकना चाहती है, इसलिए इस कार्य के लिए आवश्यक कागज इस बॉक्स के पृष्ठीय क्षेत्रफल के बराबर होगा जो घनाभ के आकार का है।

बॉक्स की लम्बाई 80सेमी, चौड़ाई 40सेमी और ऊंचाई 20सेमी है

अतः बॉक्स का पृष्ठीय क्षेत्रफल = $2(lb+bh+lh)$

$= 2[(80x40)+(40x20)+(20x80)]cm^2$

$= 2[3200+800+1600]cm^2$

$= 2x5600cm^2$

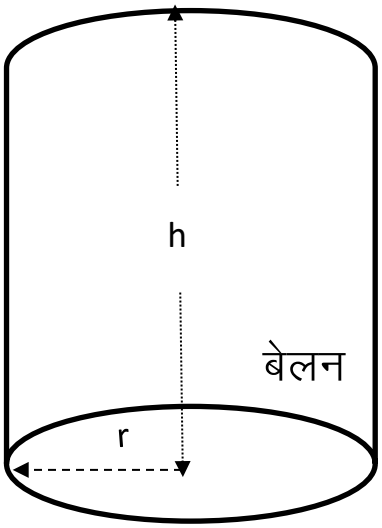
$= 11200cm^2$

अब प्रत्येक शीट का क्षेत्रफल $= 40x40\ cm^2 = 1600\ cm^2$

अब वांछित शीटों की संख्या $= \frac{\text{बॉक्स की पृष्ठीय क्षेत्रफल}}{\text{एक शीट का क्षेत्रफल}}$

$= \frac{11200}{1600} = 7$

अतः मैरी को कागज की 7 शीटों की आवश्यकता है।



लम्ब वृत्तीय बेलन का पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\pi rh$

तथा बेलन का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\pi r(r+h)$

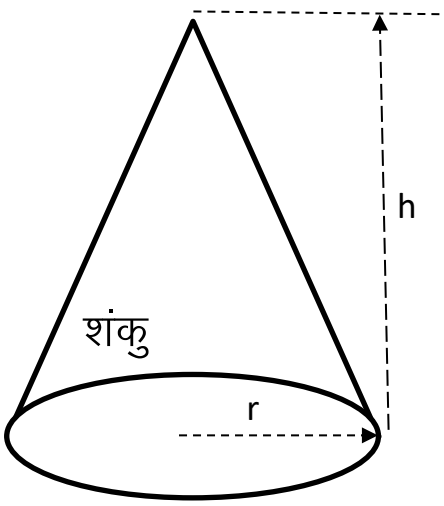
जहां r बेलन के आधार की त्रिज्या है और h बेलन की ऊंचाई है

लम्ब वृत्तीय शंकु का पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \pi rl$

तथा शंकु का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \pi r(r+l)$

जहां r शंकु के आधार की त्रिज्या तथा h ऊंचाई है

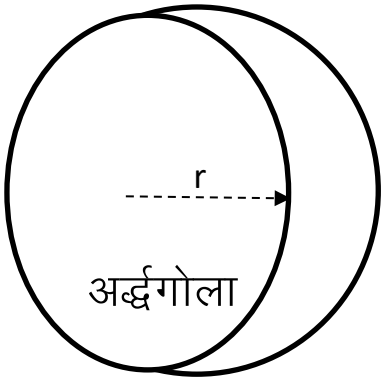
और तिर्यक ऊंचाई $l = \sqrt{r^2+h^2}$



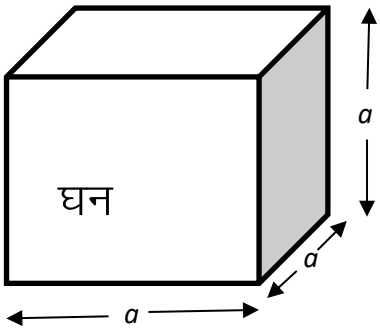
गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 4\pi r^2$

तथा अर्द्धगोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\pi r^2$

अर्द्धगोले का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 3\pi r^2$



आयतन संबंधी सूत्र :–



घनाभ का आयतन = lxbxh जहां l , b, h क्रमशः

घनाभ की लम्बाई, चौड़ाई और ऊंचाई है

घन का आयतन = a^3 जहां a घन का किनारा है।

बेलन का आयतन = $\pi r^2 h$ जहां r बेलन के आधार की त्रिज्या

तथा h बेलन की ऊंचाई है।

शंकु का आयतन = $\frac{1}{3}\pi r^2 h$ जहां r शंकु के आधार की त्रिज्या

तथा h शंकु की ऊंचाई है।

गोले का आयतन = $\frac{4}{3}\pi r^3$ जहां r गोले की त्रिज्या है।

अर्द्ध गोले का आयतन = $\frac{2}{3}\pi r^3$ जहां r गोले की त्रिज्या है।

उपर्युक्त सूत्रों को छात्रों द्वारा बार–बार लिखवाकर याद रखने हेतु प्रेरित करें।

अभ्यास प्रश्न :–

प्रश्न – 1 अर्द्धगोले के कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल का सूत्र है : (जहां संकेतों के सामान्य अर्थ है)

(अ) $2\pi r^2$ (ब) $3\pi r^2$

(स) $4\pi r^2$ (द) πr^2

प्रश्न – 2 घन का पृष्ठीय ..... होता है, जहां a घन का किनारा है।

प्रश्न –3 गोले का आयतन ..... होता है, जहां r गोले की त्रिज्या है।

प्रश्न – 4 शंकु के आयतन का सूत्र लिखिए जहां r शंकु के आधार की त्रिज्या है तथा h उसकी ऊंचाई है।

प्रश्न – 5 घनाभ का पृष्ठीय क्षेत्रफल क्या होगा सूत्र के रूप में लिखें यदि $l, b,$ और h क्रमशः घनाभ की लंबाई,चौड़ाई और ऊंचाई है।

प्रश्न – 6 आयत,वृत्त एवं वर्ग इत्यादि समतल आकृतियों के उदाहरण हैं। (सत्य/असत्य)

प्रश्न –7 घन,घनाभ,बेलन और शंकु इत्यादि ठोस आकृतियों के उदाहरण नही है। (सत्य/असत्य)

प्रश्न – 8 1.5 मी. लंबा, 1.25 मी चौड़ा और 65सेमी गहरा प्लास्टिक का एक डिब्बा बनाया जाना है। इसे ऊपर से खुला रखना है। प्लास्टिक शीट की मोटाई को नगण्य मानते हुए निर्धारित कीजिएः

(i) डिब्बा बनाने के लिए आवश्यक प्लास्टिक शीट का क्षेत्रफल ।

(ii) इस शीट का मूल्य यदि 1मी^{2} शीट का मूल्य रूपये 20 है।

प्रश्न – 9 एक कमरे की लम्बाई, चौड़ाई और ऊंचाई क्रमशः 5मी,4मी और 3मी है। रू. 7.50 प्रति मीटर की दर से कमरे की दीवारों और छत की सफेदी कराने का व्यय ज्ञात कीजिए?

प्रश्न – 10 ऊंचाई 14सेंमी वाले एक लम्बवृत्तीय बेलन का वक्रपृष्ठीय क्षेत्रफल 88सेमी^{2} है। बेलन के आधार की त्रिज्या ज्ञाज कीजिए?

प्रश्न – 11 धातु की एक चादर से 1मी. ऊंची और 140सेंमी व्यास के आधार वाली एक बंद बेलनाकार टंकी बनायी जानी है। इस कार्य के लिए कितने वर्ग मीटर चादर की आवश्यकता होगी?

प्रश्न – 12 एक शंकु का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी तिर्यक ऊंचाई 21सेंमी और आधार का व्यास 24मी है?

प्रश्न–13) 10सेंमी त्रिज्या वाले एक अर्धगोले का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए

($\pi = 3.14$)

प्रश्न – 14 निम्न व्यास वाले गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए :

(i) 14 सेंमी (ii) 21 सेंमी (iii) 3.5 सेंमी

प्रश्न – 15 माचिस की एक डिब्बी के माप 4cm x 2.5cm x1.5cm हैं। ऐसी 12 डिब्बियों के

एक पैकेट का आयतन क्या होगा?

प्रश्न – 16 एक बेलनाकार बर्तन के आधार की परिधि 132cm और उसकी ऊंचाइ 25cm है इस बर्तन में कितने लीटर पानी आ सकता है?

प्रश्न – 17 एक शंकु की ऊंचाई 15cm है यदि इसका आयतन 1570 cm^3 है, तो इसके आधार की त्रिज्या ज्ञात कीजिए?

प्रश्न – 18 किसी शंकु की ऊंचाई और तिर्यक ऊंचाई क्रमशः 21cm और 28cm है। इसका आयतन ज्ञात कीजिए?

प्रश्न – 19 धातु की एक गेंद का व्यास 4.2cm है। यदि धातु का घनत्व 8.9 ग्राम प्रति cm^3 है, तो गेंद का द्रव्यमान ज्ञात कीजिए?

अध्याय :– 6 रेखांए एवं कोण

शिक्षकों के लिए निर्देश :– इस अध्याय हेतु कुल 5 अंक निर्धारित है

अंकवार प्रश्नों की संख्या				कुल अधिभार
1 अंक	2 अंक	3 अंक	4 अंक	
2	-	1	-	1+1+3 = 5

छात्र पिछली कक्षाओं में पढ़ चुकें हैं कि एक रेखा को खींचने के लिए न्यूनतम दो बिन्दुओं की आवश्यकता होती है। छात्र कुछ अभिग्रहीतों एवं उनकी सहायता से कुछ कथनों को सिद्ध भी कर चुके है। इस अध्याय में छात्र कोणों के उन गुणों का भी अध्ययन करेंगें जब एक रेखा दो या दो से अधिक समान्तर रेखाओं को भिन्न–भिन्न बिन्दुओं पर काटती है। संबंधित अवधारणा को स्पष्ट करते हुए मॉड्यूल के प्रश्नों को हल करवांए।

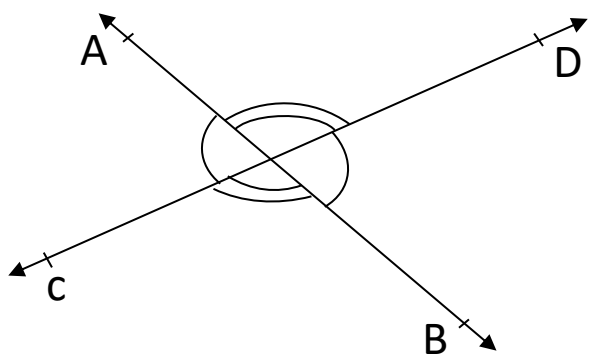
सबसे पहले आइए पिछली कक्षांओं में रेखाओं और कोणों से पढ़े गए पदों और परिभाषाओं का पुनर्वलोकन करते हैं :

- एक रेखा का वह भाग जिसके दो अंत बिन्दु हों एक 'रेखाखण्ड' कहलाता है।
- रेखा का वह भाग जिसका अंत बिन्दु एक हो एक किरण कहलाता है।
- रेखाखण्ड AB को AB से व्यक्त किया जाता है तथा किरण AB को AB से
- रेखा AB , किरण AB , रेखाखण्ड AB और उसकी लम्बाई को एक ही संकेत AB से व्यक्त करते है।
- यदि तीन या अधिक बिन्दु एक ही रेखा पर स्थित हों तो वे 'संरेख बिन्दु' कहलाते है। अन्यथा असंरेख बिन्दु कहलाते हैं।
- जब दो किरणें एक ही अंत बिन्दु से प्रारंभ होती हैं तो एक 'कोण' बनता है।
- कोण बनाने वाली दोनों किरणें कोण की भुजांए कहलाती हैं तथा उनका उभयनिष्ठ अंत बिन्दु कोण का 'शीर्ष' कहलाता है।
- एक न्यून कोण का माप 0^0 से 90^0 के बीच होता है तथा 'समकोण' का माप ठीक 90^0 होता है।
- 90^0 से अधिक परन्तु 180^0 से कम माप वाला कोण 'अधिक कोण' कहलाता है।
- एक 'ऋजु' कोण 180^0 के बराबर होता है।

- वह कोण जो 180^0 से अधिक परन्तु 360^0 से कम माप का होता है एक प्रतिवर्ती कोण कहलाता है।
- यदि दो कोणों का योग एक समकोण के बराबर हो तो ऐसे कोण 'पूरक कोण' कहलाते हैं।
- वे दो कोण जिनका योग 180^0 हो संपूरक कोण कहलाते हैं।
- दो कोण 'आसन्न कोण' कहलाते हैं, यदि उनमें एक उभनिष्ठ शीर्ष हो एक उभयनिष्ठ भुजा हो और उनकी वे भुजाएँ जो उभयनिष्ठ नहीं है, उभयनिष्ठ भुजा के विपरीत ओर स्थित हों।
- **अभिग्रहीत**–1 यदि एक किरण एक रेखा पर खड़ी हो, तो इस प्रकार बने दोनों आसन्न कोणों का योग 180^0 होता है। जब दो आसन्न कोणों का योग 180^0 हो तो वे कोणों का एक रैखिक युग्म बनाते हैं।
- **अभिग्रहीत**–2 यदि दो आसन्न कोणों का योग 180^0 है तो उनकी उभयनिष्ठ भुजाएँ एक रेखा बनाती हैं दोनों अभिग्रहीतों को मिलाकर ''रैखिक युग्म अभिग्रहीत' कहते हैं।

प्रश्न–1 सिद्व कीजिए यदि दो रेखाएँ परस्पर प्रतिच्छेद करें तो 'शीर्षाभिमुख' कोण बराबर होते हैं।

उपपत्ति :– माना AB और CD दो रेखाएँ है जो परस्पर बिन्दु O पर प्रतिच्छेद करती हैं। तो शीर्षाभिमुख कोणों के निम्न दो युग्म प्राप्त होते है।



(1) $\angle AOC$ और $\angle BOD$ (2) $\angle AOD$ और $\angle BOC$ हमें सिद्व करना है कि $\angle AOC = \angle BOD$ और $\angle AOD = \angle BOC$ किरण OA रेखा CD पर खड़ी है।

अतः $\angle AOC + \angle AOD = 180^0$ ..... (1)

इसी प्रकार किरण OD रेखा AB पर खड़ी है तो $\angle AOD + \angle BOC = 180^0$ .....(2)

अतः (1) व (2) से $\angle AOC + \angle AOD = \angle AOD + \angle BOD$ अतः परिणामस्वरूप $\angle AOC = \angle BOD$, इसी प्रकार हम सिद्ध कर सकते है कि $\angle AOD = \angle BOC$

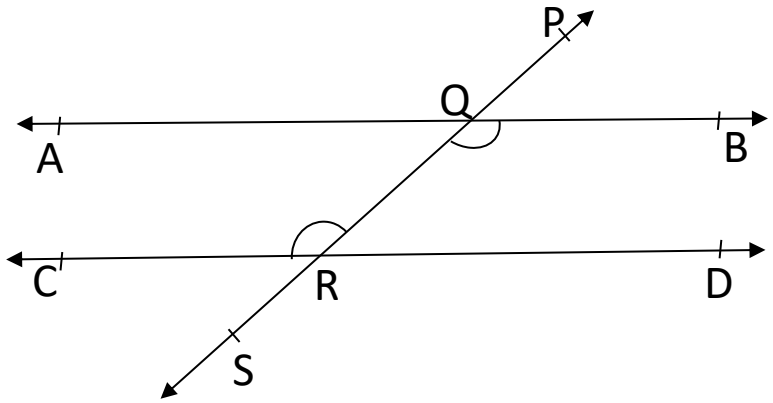
अभिग्रहीत–3 यदि एक तिर्यक रेखा दो समान्तर रेखाओं को प्रतिच्छेद करें तो संगत कोणों का प्रत्येक युग्म बराबर होता है।

<u>अभिग्रहीत</u>–<u>4</u> यदि एक तिर्यक रेखा दो रेखाओं को इस प्रकार प्रतिच्छेद करें कि संगत कोणों का युग्म बराबर है तो दोनों रेखाएँ परस्पर समान्तर होती है।

प्रश्न–2 सिद्ध कीजिए यदि एक तिर्यक रेखा दो समान्तर रेखाओं को प्रतिच्छेद करें, तो एकान्तर अंतः, कोणों का प्रत्येक युग्म बराबर होता है।

उपपत्ति - दी गई आकृति में तिर्यक रेखा PS रेखाओं AB और CD को क्रमशः Q और R पर इस प्रकार प्रतिच्छेद करती है कि $\angle BQR = \angle QRC$ यहां $AB \| CD$ है।

$\angle BQR = \angle PQA$ ..... (1) (शीर्षाभिमुख कोण हैं)



परन्तु $\angle PQA = \angle QRC$ ..... (2) (संगत कोण है)

अतः (1) व (2) से $\angle BQR = \angle QRC$

कुछ अन्य स्मरणीय बिन्दु :

1. यदि एक तिर्यक रेखा दो रेखाओं को इस प्रकार प्रतिच्छेद करें कि एकान्तर अंतः कोणों का युग्म बराबर है तो दोनों रेखाएँ समान्तर होती हैं।
2. यदि एक तिर्यक रेखा दो समान्तर रेखाओं को प्रतिच्छेद करें तो तिर्यक रेखा के एक ही ओर के अंतः कोणों का प्रत्येक युग्म संपूरक होता है।
3. यदि एक तिर्यक रेखा दो रेखाओं को इस प्रकार प्रतिच्छेद करें कि तिर्यक रेखा के एक ही ओर के अंतः कोणों का एक युग्म संपूरक हो तो दोनों रेखाएँ परस्पर समान्तर होती हैं।

<u>अभ्यास प्रश्न :</u> प्रश्न–1 वे रेखाएँ जो एक ही रेखा के समान्तर हो वे परस्पर होती है :

(अ) समान्तर (ब) लम्बवत

(स) संपाती (द) कुछ नहीं कह सकते

प्रश्न–2 यदि दो रेखाएँ परस्पर प्रतिच्छेद करे तो ..... कोण बराबर होते हैं।

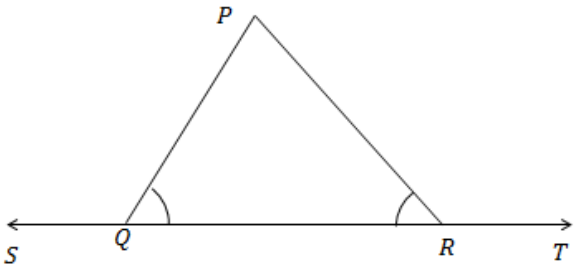
प्रश्न–3 एक ऋजु कोण की माप ..... होती है।

प्रश्न–4 वे दो कोण जिनका योग 180^0 होता है क्या कहलाते हैं।

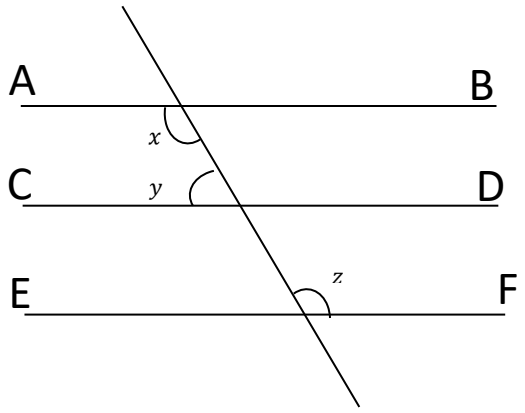
प्रश्न–5 यदि एक किरण एक रेखा पर खड़ी हो तो इस प्रकार बने दोनों आसन्न कोणों का योग क्या होता हैं ?

प्रश्न–6 यदि एक तिर्यक रेखा दो समान्तर रेखाओं को इस प्रकार प्रतिच्छेद करें कि संगत कोणों का युग्म बराबर हो तो दोनों रेखाएँ समान्तर होती हैं। (सत्य/असत्य)

प्रश्न–7 दी गई आकृति में यदि $\angle PQR = \angle PRQ$ है तो सिद्ध कीजिए $\angle PQS = \angle PRT$



प्रश्न–8 दी गई आकृति में यदि $AB \parallel CD$, $CD \parallel EF$ और $y:2 = 3:7$ है तो x का मान ज्ञात कीजिए।



अध्याय :– 7 त्रिभुज

इस अध्याय हेतु कुल 5 अंक निर्धारित है

शिक्षकों के लिए निर्देश –

अंकवार प्रश्नों की संख्या				कुल अधिभार
1 अंक	2 अंक	3 अंक	4 अंक	
2	–	1	–	1 + 1 + 3 = 5

छात्र पिछली कक्षाओं में, त्रिभुजों और उनके विभिन्न गुणों के बारे में अध्ययन कर चुके है। जैसा कि हम जानते है कि तीन प्रतिच्छेदी रेखाओं द्वारा बनाई गई एक बंद आकृति एक त्रिभुज (Triangle) कहलाती है। एक त्रिभुज की तीन भुजाएँ तीन कोण और तीन शीर्ष होते हैं। इस अध्याय में आप त्रिभुजों की सर्वांगसमता, सर्वांगसमता के नियमों, त्रिभुजों के कुछ अन्य गुणों के बारे विस्तृत रूप से अध्ययन कराने का प्रयास करें एवं विभिन्न प्रकार के मॉड्यूल में दिए गए अभ्यास प्रश्न अवश्य हल करवाए जाएं।

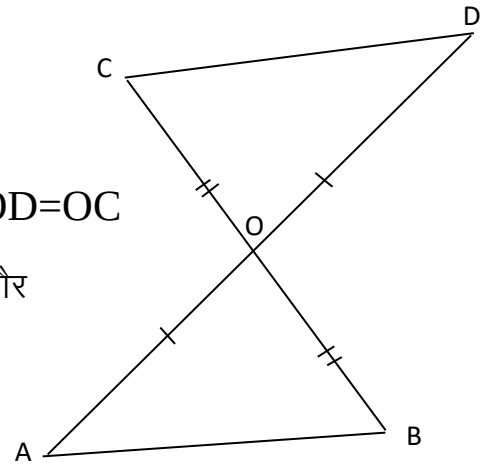
त्रिभुजों की सर्वांगसमता –

आप सबने अवश्य ही देखा होगा कि हमारी आपकी एक ही साइज की दो फोटो की प्रतियां सर्वसम होती है इसी प्रकार एक ही माप की दो चूड़ियॉ और एक ही बैंक द्वारा जारी किए गए दो एटीएक कार्ड सर्वसम होते है और यही भी गौर किया होगा कि एक ही वर्ष में ढले दो एक रूपए के सिक्कों में से एक दूसरे को दूसरे पर रखे तो वे एक दूसरे को पूर्णतया ढक लेते हैं। ऐसी आकृतियों 'सर्वांगसम आकृतियाँ' कहलाती है अर्थात् 'वे आकृतियाँ जिनके समान आकार और समान माप हैं)।

हम यदि एक त्रिज्या के दो वृत्त खींचे और एक दूसरे पर रखकर देखते है में एक दूसरे पूर्णतः ढक लेते है। अर्थात 'एक ही तृत्या के दो वृत्त सर्वांगसम होते है। इसी प्रकार एक ही माप की भुजाओं वाले वर्ग भी सर्वांगसम होती है।

आइए अब दो त्रिभुजों की सर्वांगसमता की चर्चा करें। सर्वप्रथम हम यह जानते है कि दो त्रिभुज सर्वांगसम होते है, यदि एक त्रिभुज की भुजाएँ और कोण दूसरे त्रिभुज की संगत भुजाओं और कोणों के बराबर हों। पिछली कक्षाओं में आपने त्रिभुजों की सर्वांगसमता के लिए चार कसौटियाँ या नियम पढ़ चुके हैं। आइए इनका पुनरावलोकन करें।

अभिग्रहीत –7.1 (SAS सर्वांगसमता नियम) दो त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं, यदि एक त्रिभुज की दो भुजाओं और उनका अन्तर्गत कोण दूसरे त्रिभुज की दो भुजाओं और उनके अन्तर्गत कोण के बराबर हो।



उदाहरण प्रश्न–1 दी गई आकृति में OA=OB और OD=OC

दर्शाइए कि (i) $\Delta AOD \cong \Delta BOD$ और

(ii) AD=BC

हल : ΔAOD और ΔBOD में

OA=OB {दिया है}

OC=OD

क्योंकि $\angle AOD$ और $\angle BOC$ शीर्षाभिमुख कोणों का युग्म है, अतः

$$\angle AOD = \angle BOC$$

इसलिए $\Delta AOD \cong \Delta BOD$ {SASसर्वांगसमता नियम द्वारा}

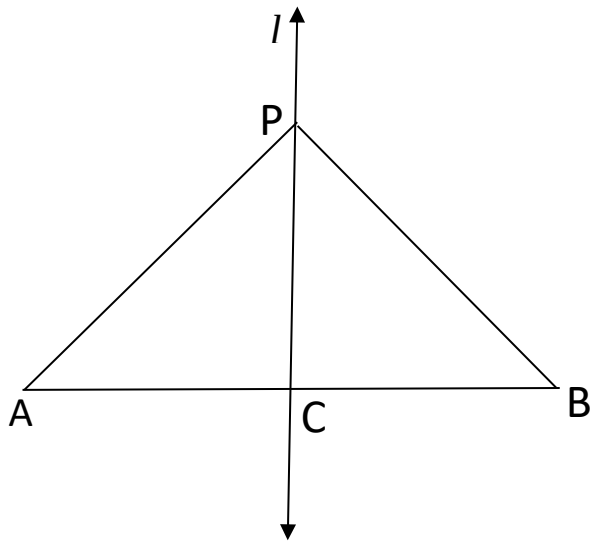
(ii) सर्वांगसम त्रिभुजों AOD और BOD में अन्य संगत भाग भी बराबर होंगें।

अतः $\angle OAD = \angle OBC$ है जो कि रेखाखण्डों AD और BC के लिए एकान्तर कोणों का एक युग्म बनाते है।

अतः AD=BC

उदाहरण प्रश्न–2 AB एक रेखाखण्ड है और रेखा l इसका लम्ब समद्विभाजक है। यदि l पर स्थित P कोई बिन्दु है, तो दर्शाइए कि P बिन्दुओं A और B से समदूरस्थ हैं।

हल : $l \perp AB$ है और AB के मध्य बिन्दु C से होकर जाती है।



हमें दर्शाना है कि PA=PB है

इसके लिए ΔPCA और ΔPCB लेते हैं

यहां AC=BC {C,AB का मध्य बिन्दु है}

$\angle PCA = \angle PCB = 90^0$ है {दिया है}

PC=PC {उभयनिष्ठ}

अतः $\Delta PCA \cong \Delta PCB$ (SAS)

इसलिए PA=PB

प्रमेय :– दो त्रिभुज सर्वांगसम होते है, यदि एक त्रिभुज के दो कोण और उनकी अन्तर्गत भुजा दूसरे त्रिभुज के दो कोणों और उनकी अन्तर्गत भुजा के बराबर हों

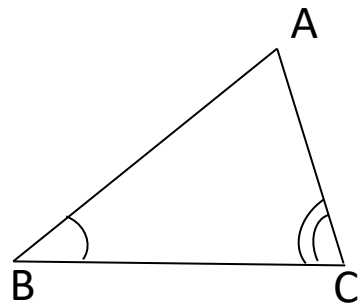
अर्थात् दो त्रिभुजों ABC

और DEF में यदि

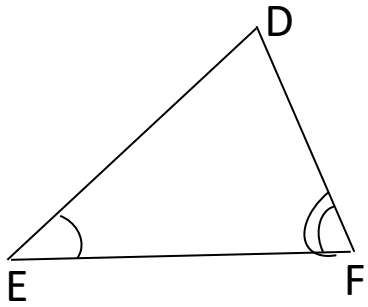
$\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle E$

और BC=EF

तो $\Delta ABC \cong \Delta DEF$



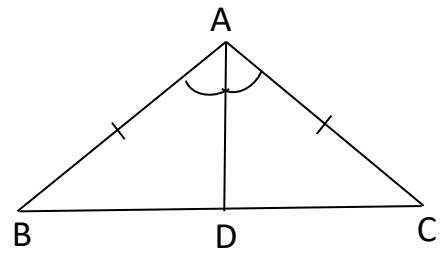
किसी त्रिभुज की दो भुजांए बराबर हो तो उसे समद्विबाहु त्रिभुज कहते हैं।



प्रमेय :– 2 एक समद्विबाहु त्रिभुज की बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण बराबर होते हैं।

उपपत्ति – हमें एक समद्विबाहु ΔABC दिया है जिसमें

$AB = AC$ हमें सिद्ध करना है $\angle B = \angle C$



इसके लिए $\angle A$ का समद्विभाजक खींचतें हैं

जो BC से D पर मिलता है।

अब ΔADC और ΔCAD में

$AB = AC$ {दिया है}

$\angle BAD = \angle CAD$ {रचना से}

$AD = AD$ {उभयनिष्ठ}

अतः $\Delta BAD \cong \Delta CAD$ {SASसर्वांगसमता नियम द्वारा}

इसलिए $\angle B = \angle C$

प्रमेय –3 यदि त्रिभुज की तीनों भुजाएं एक अन्य त्रिभुज की तीनों भुजाओं के बराबर हों, तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते है।

प्रमेय –4 यदि दो समकोण त्रिभुजों में, एक त्रिभुज का कर्ण और एक भुजा क्रमशः दूसरे के कर्ण और एक भुजा के बराबर हों, तो दोनो त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं।

अभ्यास प्रश्न

प्रश्न –1 एक समबाहु त्रिभुज का प्रत्येक कोण होता है –

(अ) 50^0 (ब) 60^0

(स) 70^0 (द) 75^0

प्रश्न – 2 त्रिभुज की बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण ..... होते हैं।

प्रश्न – 3 ..... त्रिज्याओं वाले दो वृत्त सर्वांगसम होतें हैं।

प्रश्न – 4 त्रिभुज के बराबर कोणों की सम्मुख भुजांए बराबर नहीं होतीं हैं। (सत्य/असत्य)

प्रश्न – 5 समान भुजओं वाले दो वर्ग सर्वांगसम होतें हैं। (सत्य/असत्य)

प्रश्न – 6 यदि एक त्रिभुज की तीनों भुजांए दूसरे त्रिभुज की तीनों भुजाओं के बराबर हो तो दोनो त्रिभुज परस्पर क्यों कहे जाते हैं।

प्रश्न – 7 ΔABC में $\angle A$ का समद्विभाजक AD भुजा BC पर लम्ब है दर्शाइये कि AB =

AC अर्थात् ΔABC समद्विबाहु है।

प्रश्न – 8 दर्शाइये कि समबाहु त्रिभुज का प्रत्येक कोण 60^0 का होता है।

अध्याय :– 10 वृत्त

शिक्षको के लिए निर्देश :– इस अध्याय हेतु कुल 5 अंक निर्धारित है

अंकवार प्रश्नों की संख्या				कुल अधिभार
1 अंक	2 अंक	3 अंक	4 अंक	
2	–	1	–	1 + 1 + 3 = 5

छात्र ऐसी बहुत सी चीजों से अवश्य रूप से परिचित होते है जो आकार में गोल हों जैसे गाड़ी का पहिया, चूडियाँ, कई घड़ियों के डायल, रूपयों के सिक्के चाबी के गुच्दे कमीज के बटन आदि। ऐसे व्यवहारिक उदाहरणों के माध्यम से एवं कुछ मॉडल्स के द्वारा वृत्त की अवधारणा को स्पष्ट करने का प्रयास करें जिससे विषयवस्तु रोचक और बोधगम्य बन सकें। आइए हम इस संबंध में कुछ चर्चा प्रारंभ करते है

घड़ी में छात्रों ने ध्यान दिया होगा कि सेकेण्ड की सुई घड़ी के डायल के ऊपर जल्दी–जल्दी चक्कर लगाती है तथा उसका सिरा एक गोल पथ में चलता है। सेकेण्ड की सुई के सिरे से बनता हुआ पथ एक वृत्त कहलाता है उस अध्याय हम वृत्त , इससे संबंधित अन्य पदों तथा वृत्त के कुछ गुणों के बारे में अध्ययन करेंगे।

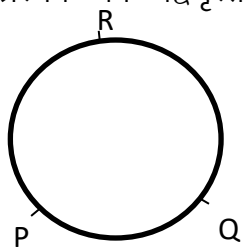
गतिविधि – छात्रों द्वारा परकार और पेंसिल की सहायता से वृत्त बनवाएं : परकार का नुकीला सिरा कागज के पृष्ठ के एक बिन्दु पर रखकर दूसरी भुजा जिसमें पेंसिल है को कुछ दूरी तक खोलकर एक चक्कर घुमाते हैं, पेंसिल से कागज बनी आकृति एक वृत्त है। अर्थात 'एक तल पर उन सभी बिन्दुओं का समूह, जो तल के स्थित बिन्दु से एक स्थिर दूरी पर स्थित हो एक वृत्त कहलाता हैं'। स्थिर बिन्दु को वृत्त का केन्द्र कहते हैं तथा स्थिर दूरी को वृत्त की तृज्या कहते है।

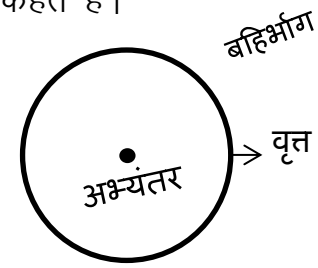
एक वृत्त उस तल को जिसमें वह स्थित तीन भागों में विभाजित करता है। ये हैं

(1) वृत्त के अंदर का भाग जिसे अभ्यंतर भी कहते हैं।

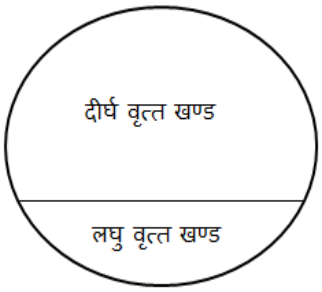
(2) वृत्त के बाहर का भाग, जिसे बर्हिभाग भी कहते हैं। वृत्त तथा इसका अभ्यंतर मिलकर वृत्तीय क्षेत्र बनाते है। दो बिन्दुओं के बीच वृत्त के भाग को एक चाप (arc) कहते हैं। दी गई आकृति में बिन्दुओं P और Q के बीच वृत्त के भागों को यदि देखें तो पाते हैं कि दोनों भागों में एक भाग बड़ा तथा एक छोटा है बड़े भाग को 'दीर्घचाप' तथा छोटे भाग को लघुचाप कहते है। लघुचाप को $\overset{\frown}{PQ}$ से व्यक्त करते है तथा दीर्घ चाप को $\overset{\frown}{PRQ}$ से जब P और Q एक ब्यास के सिरे हो तो दोनों चाप बराबर हो जाते है और प्रत्येक को अर्द्धवृत्त कहते है।

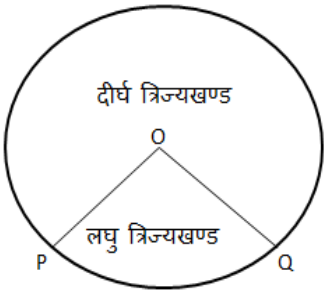
सम्पूर्ण वृत्त की लम्बाई को उसकी 'परिधि' कहतें है।



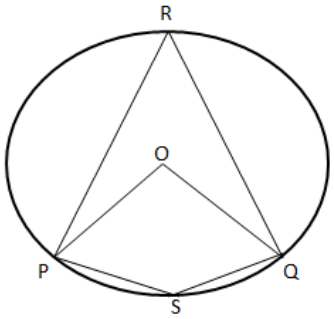


जीवा तथा प्रत्येक चाप के मध्य क्षेत्रों को वृत्तीय क्षेत्र का खण्ड या सरल शब्दों में 'वृत्तखण्ड' कहतें हैं। इसके भी दो प्रकार होते हैं : दीर्घवृत्त खण्ड या लघु वृत्त खण्ड । केन्द्र को एक चाप के सिरों से मिलाने वाली त्रिज्याओं एवं चाप के बीच के क्षेत्र को 'त्रिज्याखण्ड' कहतें हैं। वृत्तखण्ड की तरह ' लघु त्रिज्यखण्ड' तथा 'दीर्घ त्रिज्यखण्ड' क्रमशः लघुचाप तथा दीर्घ चाप के संगत होते हैं। जब दोनों चाप बराबर हो जाते हैं और प्रत्येक अर्द्धवृत्त होता है, तो दोनों वृत्तखण्ड तथा त्रिज्यखण्ड एक समान हो जाते हैं। और प्रत्येक को अर्धवृत्तीय क्षेत्र कहतें है।





<u>जीवा द्वारा एक बिन्दु पर अंतरित कोण</u> :–



एक रेखाखण्ड PQ तथा एक बिन्दु R जो रेखा PQ पर स्थित न हो लेतें हैं PR तथा QR को मिलातें है,

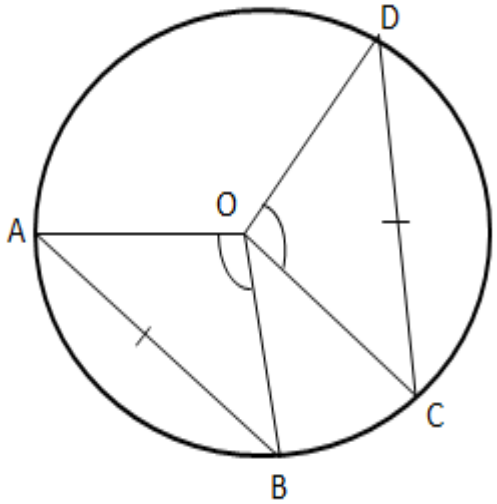
कोण PRQ, रेखाखण्ड PQ द्वारा बिन्दु R पर अंतरित कोण कहलाता है।

∠POQ जीवा PQ द्वारा केन्द्र O पर अंतरित कोण है।

∠PRQ तथा ∠PSQ क्रमशः PQ द्वारा दीर्घ चाप PQ तथा लघुचाप PQ पर स्थित बिन्दुओं R और S पर अंतरित कोण है।

यदि वृत्त की दो या दो से अधिक बराबर जीवांए खींचें तथा उनके द्वारा अंतरित कोण को मापें आप पाएंगें कि उनके केन्द्र पर अंतरित कोण समान हैं।

उदाहरण प्रश्न – वृत्त की बराबर जीवांए केन्द्र पर समान कोण अंतरित करती हैं। सिद्ध कीजिए।



उपपत्ति :– एक वृत्त , जिसका केन्द्र O है की दो बराबर जीवांए AB और CD दी हुईं हैं हमें सिद्ध करना है ∠AOB = ∠COD

ΔAOB तथा ΔCOD में

OA =OC (एक वृत्त की त्रिज्यांए)

OB =OD (एक वृत्त की त्रिज्यांए)

AB =CD (दिया है)

अतः ΔAOB ≅ ΔCOD (SSS नियम)

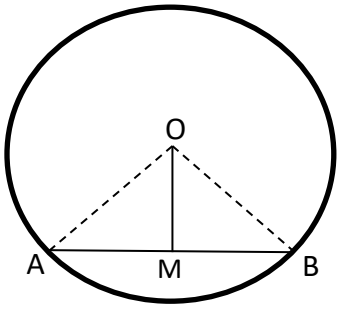
इस प्रकार ∠AOB = ∠COD

''<u>वृत्त के केन्द्र से जीवा पर डाला गया लम्ब जीवा को समद्विभाजित करता है</u>''

उदा0 प्रश्न – एक वृत्त के केन्द्र से एक जीवा को समद्विभाजित करने के लिए खींची गई रेखा जीवा पर लम्ब होती है। सिद्ध कीजिए।

उपपत्ति :– एक वृत्त, जिसका केन्द्र O है, की AB जीवा है

और O को AB के मध्य बिन्दु M से मिलाया गया है।



सिद्ध करना है कि $OM \perp AB$

OA तथा OB को मिलाते है। तो

ΔOAM तथा ΔOBM में

$OA = OB$ (वृत्त की त्रिज्यांए)
$AM = BM$ (M, AB का मध्य बिन्दु है, दियाहै)
$OM = OM$ (उभयनिष्ठ)
अतः $\Delta OAM \cong \Delta OBM$ (SSS नियम)
इससे प्राप्त होता हैः $\angle OMA = \angle OMB = 90^0$

अतः $OM \perp AB$

अन्य महत्वपूर्ण तथ्यः

1. तीन असंरेखीय बिन्दुओं से जाने वाला एक और केवल एक वृत्त होता है।

2. एक वृत्त के केन्द्र से समदूरस्थ जीवांए लम्बाई में समान होती है।

3. एक वृत्त की (या सर्वांगसमता वृत्तों की) बराबर जीवांए केन्द्र से (या केन्द्रों से) समान दूरी
पर होती है।

4. एक बिन्दु से एक रेखा पर लम्ब की लम्बाई रेखा की बिन्दु से दुरी होती है।

अभ्यास प्रश्न –

1. तीन असंरेखीय बिन्दुओं से होकर जाने वाले वृत्तों की संख्या होती है।

(अ) 1 (ब) 2

(स) 3 (द) 4

2. किसी वृत्त के केन्द्र से किसी जीवा पर डाला गया लम्ब जीवा को ..... करता है।

3. वृत्त की सबसे बड़ी जीवा वृत्त का ..... होता है।

4. एक वृत्त जिस तल पर स्थित है, उसे कितने भागों में विभाजित करता है।

5. केन्द्र को वृत्त पर किसी बिन्दु से मिलाने वाला रेखाखण्ड वृत्त की त्रिज्या होती है। (सत्य / असत्य)

6. यदि एक वृत्त को तीन बराबर चापों में बांट दिया जाए तो प्रत्येक भाग दीर्घ चाप होता है। (सत्य / असत्य)

प्रश्न–7 सिद्ध कीजिए की सर्वांगसम वृत्तों की बराबर जीवांए उनके केन्द्रों पर बराबर कोण अंतरित करती है।

प्रश्न– 8 एक दिए वृत्त के केन्द्र को ज्ञात करने की विधि का वर्णन कीजिए।

प्रश्न– 9 यदि दो वृत्त दो बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करें, तों सिद्ध कीजिए की उनके केन्द्र उभयनिष्ठ
जीवा को लम्ब समद्विभाजक पर स्थित हैं।

प्रश्न–10 5 सेमी तथा 3सेमी त्रिज्या वाले दो वृत्त दो बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करतें हैं, तथा उनके केन्द्रों के बीच की दूरी 4सेमी है। उभयनिष्ठ जीवा की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

इन प्रश्नों के अतिरिक्त प्रश्न बैंक के प्रश्नों को भी हल कराया जाना सुनिश्चित करें।

अध्याय :– 8 चतुर्भुज

शिक्षको के लिए निर्देश :– इस अध्याय हेतु कुल 5 अंक निर्धारित है

अंकवार प्रश्नों की संख्या				कुल अधिभार
1 अंक	2 अंक	3 अंक	4 अंक	
1	–	–	1	1 + 4 = 5

छात्र अध्याय 6 एवं 7 में त्रिभुजों के अनेक गुणों के बारे में अध्ययन कर चुकें हैं । इस अध्याय में हमें विभिन्न प्रकार के चतुर्भुजों और उनके गुणों के बारे में अध्ययन करना है, विशेष तौर पर हमें समान्तर चतुर्भुज के बारे में अध्ययन करना है। शिक्षक सरल एवं व्यवहारिक विधियों द्वारा चतुर्भुजों (या समान्तर चतुर्भुजों) की आकृति एवं गुणों की चर्चा करें। जैसे अपने आस–पास की चतुर्भुज के आकार की अनेक वस्तुएं जिनकी चर्चा हम कर सकते हैं। उदाहरण स्वरूप अपने कक्षा का फर्श, दीवार, छत, खिडकियां, श्यामपट, डस्टर का प्रत्येक फलक, अपनी पुस्तक का प्रत्येक पृष्ठ, पढ़ने की मेज का उपरी पृष्ठ इत्यादि।

मॉड्यूल में दिए गए उदाहरण प्रश्न एवं अभ्यास प्रश्नों को हल करवांए छात्रों को स्वयं हल करने कहें साथ ही प्रश्न बैंक के सभी प्रश्न छात्र हल कर सकें इस हेतु सार्थक प्रयास करें।

आइए हम इस अध्याय से संबंधित विषयवस्तु पर चर्चा प्रारंभ करें :

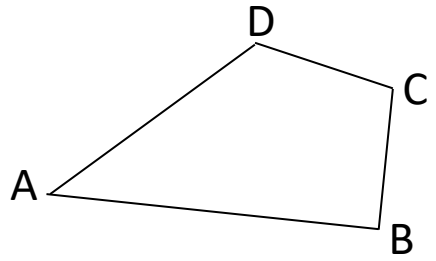
हम जानते है कि तीन असंरेख बिन्दुओं को युग्मों में जोड़ने पर जो आकृति प्राप्त होती है त्रिभुज कहलाती है। अब यदि चार बिन्दु अंकित कर देंखें कि क्रमानुसार युग्मों में इन्हें जोड़ने पर क्या आकृति बनती है ?

ध्यान देने पर हम पाते है कि यदि सभी बिन्दु संरेख हो तो हमें रेखाखण्ड प्राप्त होता है। यदि चार बिन्दुओं में से तीन संरेख हो तो त्रिभुज और यदि चार में से कोई तीन संरेख न हों तो हमें चतुर्भुज प्राप्त होता है।

एक चतुर्भुज में चार भुजांए चार कोण और चार शीर्ष होते है जैसे निम्न चतुर्भुज ABCD में :–

AB,BC,CD और DA चार भुजांए हैं

A,B,C और D चार शीर्ष हैं।

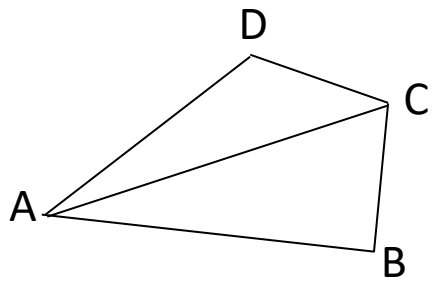


तथा $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ और $\angle D$ शीर्षों पर बने चार कोण हैं। अब यदि सम्मुख शीर्षों A और C तथा B और D को जोड़े तो AB तथा BD चतुर्भुज ABCD के दो विकर्ण कहलाते हैं।

'' चतुर्भुज के चारों कोणों का योग 360^0 होता है'' इसकी जांच चतुर्भुज का एक विकर्ण खींचकर उसे दो त्रिभुजों में विभाजित करके कर सकते हैं।

प्रश्न– दिखाइए कि चतुर्भुज के चारों कोणों का योग 360^0 होता है।

हल : माना ABCD एक चतुर्भुज है और AC इसका एक विकर्ण है।



ΔADC में

$\angle DAC + \angle ACD + \angle D = 180^0$ ..... (1)

ठसी प्रकार ΔBAC में

$\angle CAB + \angle ACB + \angle B = 180$ ..... (2)

(1) व (2) को जोड़ने पर

$\angle DAC + \angle ACD + \angle D + \angle CAB + \angle ACB + \angle B = 180 + 180 = 360$

$\angle DAC + \angle CAB + \angle ACD + \angle ACB + \angle B + \angle D = 360$

$\angle A + \angle C + \angle B + \angle D = 360$

अर्थात् चतुर्भुज के कोणों का योग 360^0 होता है।

चतुर्भुज के प्रकार से संबंधित महत्वपूर्ण बिन्दु

- यदि चतुर्भुज की सम्मुख भुजाओं का एक युग्म समान्तर हो तो यह एक समलंब (Trapezium) कहलाता है।
- यदि चतुर्भुज के सम्मुख भुजाओं के दोनों युग्म समान्तर हो तो ये चतुर्भुज 'समान्तर चतुर्भुज' कहलाता है।
- यदि समान्तर चतुर्भुज में एक कोण समकोण है तो यह समान्तर चतुर्भुज 'आयत' कहलाता है। (यहां यह स्पष्ट करें कि एक कोण समकोण होने का अर्थ चारों कोणों के समकोण होने से है)
- यदि समान्तर चतुर्भुज की सभी भुजाएं बराबर हो तो यह 'समचतुर्भुज' कहलाता है।
- यदि समान्तर चतुर्भुज में एक कोण समकोण और चारों भुजाएं बराबर हो तो यह एक वर्ग कहलाता है (यहां पर भी एक कोण समकोण होने का अर्थ चारों कोणों के समकोण होने से है।)

- वर्ग, आयत और समचतुर्भुज में से प्रत्येक एक समान्तर चतुर्भुज होता है।
- वर्ग एक आयत है और समचतुर्भुज भी ।
- एक समान्तर चतुर्भुज एक समलम्ब है।
- एक आयत अथवा समचतुर्भुज एक वर्ग नहीं है।
  उपर्युक्त बिन्दुओं पर वस्तुनिष्ठ प्रश्न पूछे जा सकते हैं छात्र को स्पष्ट कर याद रखने हेतु प्रेरित करें।

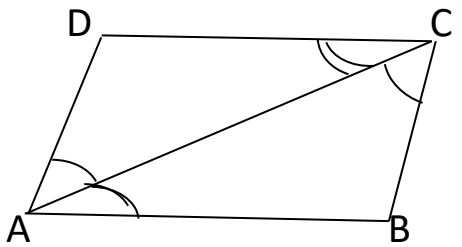
क्रियाकलाप – कागज पर एक समान्तर चतुर्भुज खींच कर इसके विकर्ण के अनुदिश काटते हैं तो दो त्रिभुज हमें प्राप्त होते हैं। आइए अब इन त्रिभुजों को एक के ऊपर दूसरे को रखकर देखते है और पाते है कि दोनों त्रिभुज परस्पर सर्वांगसम है। अर्थात समान्तर चतुर्भुज का एक विकर्ण उसे दो सर्वांगसम त्रिभुजों में विभाजित करता है।

प्रश्न– सिद्ध कीजिए कि 'समान्तर चतुर्भुज का एक विकर्ण उसे दो सर्वांगसम त्रिभुजों में विभाजित करता है।

उपपत्ति – माना ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है

और AC उसका एक विकर्ण है जो समान्तर चतुर्भुज ABCD को दो त्रिभुजों

ABC और CDA में विभाजित करता है।



हमें सिद्ध करना है कि $\Delta ABC \cong \Delta ACD$

यहां $BC \parallel AD$ और AC एक तिर्यक रेखा है।

इसलिए $\angle BCA = \angle DAC$ {एकान्तर कोणों का युग्म}

पुनः $AB \parallel DC$ और AC एक तिर्यक रेखा है।

इसलिए $\angle BAC = \angle DCA$ {एकान्तर कोणों का युग्म}

और $AC = AC$ {उभयनिष्ठ}

अतः $\Delta ABC \cong \Delta CDA$ {ASAनियम }

इसी प्रकार इसके विलोम को भी हल करवांए।

प्रश्न – सिद्ध कीजिए एक चतुर्भुज के विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करें, तो वह एक समान्तर चतुर्भुज होता है।

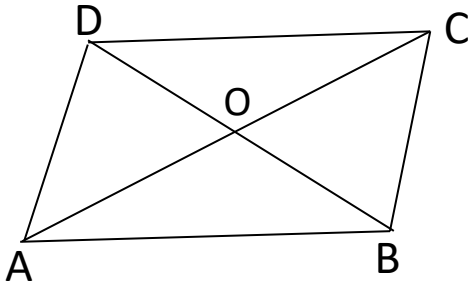
हल– यहां ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है और इसके विकर्ण AC और BD बिन्दु o पर इस प्रकार प्रतिच्छेद करते हैं कि OD = OB तथा OA = OC

तथा $\angle AOB = \angle COD$ (शीर्षाभिमुख) कोण

अतः $\Delta AOB \cong \Delta COD$

इसलिए AB||CD (एकान्तर कोण)

अतः ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है।



अभ्यास प्रश्न–

प्रश्न–1 आयत का प्रत्येक कोण होता है ।

(अ) 90^0 (ब) 100^0

(स) 80^0 (द) 60^0

प्रश्न–2 किसी चतुर्भुज के कोणों का योग होता :

(अ) 180^0 (ब) 360^0

(स) 540^0 (द) 270^0

प्रश्न–3 आयत के विकर्ण परस्पर समद्विभाजित करते है और ..... होते है।

प्रश्न–4 समचतुर्भुज के विकर्ण परस्पर ..... पर समद्विभाजित करते है।

प्रश्न–5 समान्तर चतुर्भुज का एक विकर्ण उसे तीन सर्वांगसम त्रिभजों में विभाजित करता है। (सत्य/असत्य)

प्रश्न–6 वर्ग के विकर्ण परस्पर समकोण पर समद्विभाजित करते हैं और बराबर होते है (सत्य/असत्य)

प्रश्न–7 एक चतुर्भुज जिसके सम्मुख भुजाओं का प्रत्येक युग्म बराबर हो क्या कहलाता है?

प्रश्न–8 क्या एक आयत अथवा समचतुर्भुज एक वर्ग होता है ?

प्रश्न–9 एक चतुर्भुज के कोण 3:5:9:13 के अनुपात में है तो इस चतुर्भुज के सभी कोण ज्ञात कीजिए।

प्रश्न–10 दर्शाइए यदि एक समान्तर चतुर्भुज के विकर्ण बराबर हो तो वह एक आयत है।

अध्याय :– 9 समान्तर चतुर्भुजों और त्रिभुजों का क्षेत्रफल

शिक्षकों के लिए निर्देश :

इस अध्याय हेतु कुल 4 अंक निर्धारित है

अंकवार प्रश्नों की संख्या				कुल अधिभार
1 अंक	2 अंक	3 अंक	4 अंक	
2	1	–	–	1 + 1 + 2 = 4

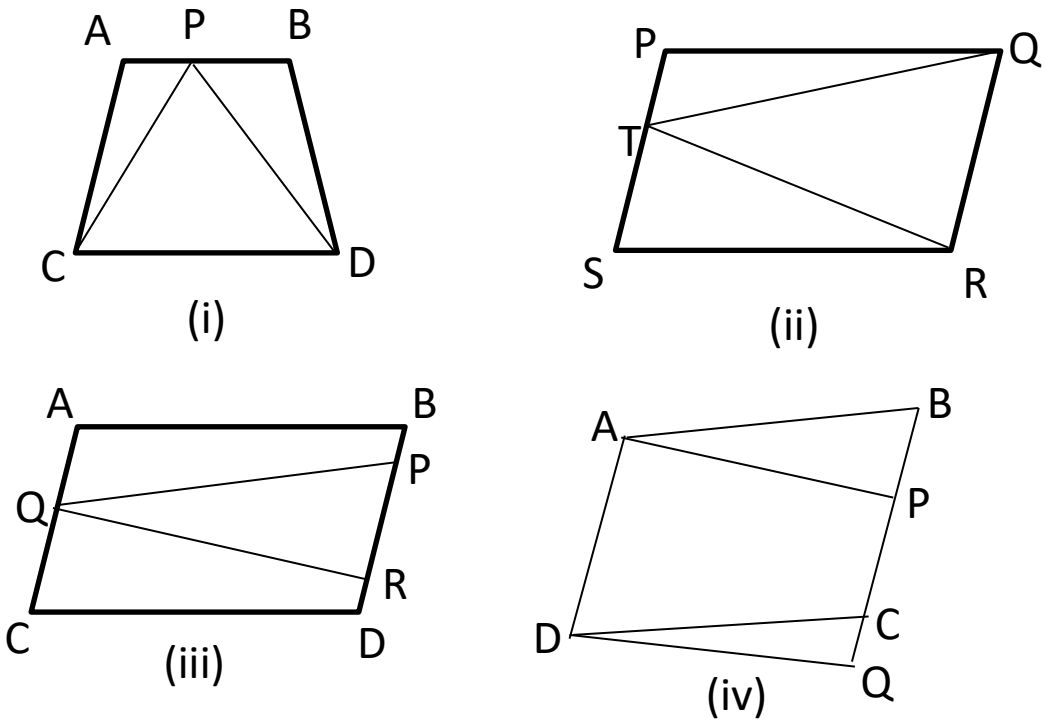
छात्र पिछली कक्षाओं से विभिन्न आकृतियों जैसे– आयत,वर्ग,समान्तर चतुर्भुज, त्रिभुज इत्यादि के विषय में एवं इनके क्षेत्रफलों को ज्ञात करने वाले सूत्रों के बारे में जानतें हैं। इस अध्याय में इन ज्यामितीय आकृतियों के क्षेत्रफलों के बीच संबंध का उस प्रतिबंध के अंतर्गत अध्ययन करके जब ये एक ही आधार पर स्थित हों और एक ही समान्तर रेखाओं के बीच में हों उपरोक्त सूत्रों के ज्ञान को अधिक प्रबल बनाने का प्रयत्न किया जाएगा। यह अध्ययन त्रिभुजों की समरूपता के कुछ परिणामों को भी समझने में भी बहुत उपयोगी रहेगा।

एक ही आधार पर एक ही समान्तर रेखाओं के बीच आकृतियों के क्षेत्रफलों से संबंधित विभिन्न प्रकार के प्रश्नों को हल करवांए एवं छात्रों को संबंधित अवधारणा से अच्छी तरह अवगत कराने का प्रयास करें। मॉड्यूल के प्रश्नों एवं प्रश्नबैंक के प्रश्नों को अवश्य हल करवांए।

एक ही आधार पर और एक ही समान्तर रेखाओं के बीच आकृतियां :–

''दो आकृतियां एक ही आधार पर और एक ही समान्तर रेखाओं के बीच स्थित कही जाती है, यदि उनका एक उभयनिष्ठ आधार (भुजा) हो तथा उभयनिष्ठ आधार के सम्मुख प्रत्येक आकृति के शीर्ष उस आधार के समान्तर किसी रेखा पर स्थित हों ''

प्रश्न – निम्नलिखित आकृतियों में से कौन – कौन सी आकृतियां एक ही आधार पर और एक ही समान्तर रेखाओं के बीच स्थित हैं। ऐसी स्थिति में उभयनिष्ठ आधार और दोनो समान्तर रेखांए लिखिए।



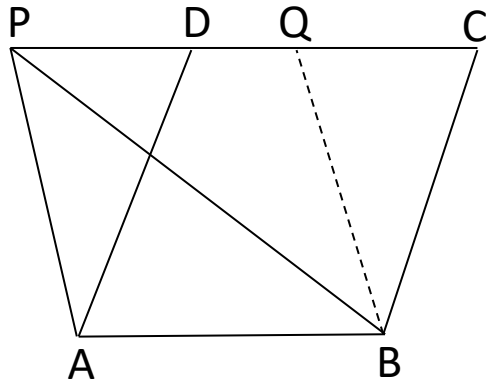
उपर्युक्त चित्रों में से (i), (ii) एवं (iv) एक ही आधार एवं एक ही समान्तर रेखाओं के बीच स्थित है।

(i) में आधार DC है तथा DC ∥ AB

(ii) में आधार QR है तथा PS ∥ QR

(iv) में आधार AD है तथा AD ∥ BQ

प्रश्न – यदि एक त्रिभुज और एक समान्तर चतुर्भुज एक ही आधार पर और एक ही समान्तर रेखाओं के बीच स्थित हों तो सिद्ध कीजिए कि त्रिभुज का क्षेत्रफल समान्तर चतुर्भुज के क्षेत्रफल के आधार के बराबर होता है?



हल : माना ΔABP और समान्तर चतुर्भुज ABCD एक ही आधार AB और एक ही समान्तर रेखाओं AB और PC के बीच स्थित हैं

हमें सिद्ध करना है कि ar(PAB) = ½ ar(ABCD) है।

एक अन्य समान्तर चतुर्भुज ABQP प्राप्त करने के लिए BQ ∥ AP खींचतें हैं। ये समान्तर चतुर्भुज ABQP तथा ABCD एक ही आधार पर AB तथा एक ही समान्तर रेखाओं पर AB व PC के बीच स्थित है।

अतः ar(ABQP) = ar(ABCD) ——————(1)

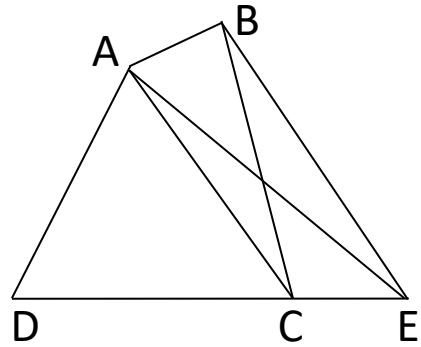
किन्तु $\Delta PAB \cong \Delta BQP$ {विकर्ण PB समान्तर चतुर्भुज PABQ को दो सर्वांगसम त्रिभुजों में बांटता है}

अतः ar(PAB) = ar(BQP) ——————(2)

इसलिए $ar(PAB) = \frac{1}{2} ar(ABQP)$ ——————(3)

अतः (1) व (3) से $ar(PAB) = \frac{1}{2} ar(ABCD)$

प्रश्न– दी गई आकृति में ABCD एक चतुर्भुज है और BE||AC इस प्रकार हैं कि BE बढ़ाई गई DC को E पर मिलती है। दर्शाइए कि त्रिभुज ADE का क्षेत्रफल चतुर्भुज ABCD के क्षेत्रफल के बराबर है।



हलः यहां ΔBAC और ΔEAC एक ही आधार और

एक ही समान्तर रेखाओं और

बीच स्थित हैं।

अतः ar(BAC) = ar(EAC)

ar(BAC) + ar(ADC) = ar(EAC) + ar(ADC) (दोनों पक्षों में एक ही क्षेत्रफल जोडने पर)

ar(ABCD) = ar(ADE)

अभ्यास प्रश्न –

प्रश्न– 1 समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल उसके आधार तथा संगत शीर्षलम्ब का होता है :

(अ) योगफल (ब) गुणनफल

(स) भागफल (द) शेषफल

प्रश्न – 2 त्रिभुज की मध्यिका उसे बराबर क्षेत्रफलों वाले ..... त्रिभुजों में विभाजित करती है।

प्रश्न – 3 त्रिभुज का क्षेत्रफल उसके आधार और संगत शीर्षलम्ब के गुणनफल का आधा होता है (सत्य/असत्य)

प्रश्न – 4 दो सर्वांगसम आकृतियों के क्षेत्रफल बराबर नहीं होतें है। (सत्य/असत्य)

प्रश्न – 5 एक ही आधार (या बराबर आधारों) वाले और एक ही समान्तर रेखाओं के बीच स्थित त्रिभुज क्षेत्रफल बराबर होते हैं अथवा नहीं?

प्रश्न – 6 यदि P और Q क्रमशः समान्तर चतुर्भुज ABCD की भुजाओं DC और AD पर स्थित बिन्दु हैं तो दर्शाइए ar(APB)= ar(BQC)

प्रश्न – 7 ΔABC में E मध्यिका AD का मध्य बिन्दु है दर्शाइए कि

$$ar(BED)= \frac{1}{4} ar(ABC)$$

प्रश्न – 8 समान्तर चतुर्भुज के दो विकर्ण उसे बराबर क्षेत्रफलों वाले कितने त्रिभुजों में बांटते हैं।